3-1 二次函數

◆函數

兩個數量之間，它們所產生的對應關係。其中先改變的量，我們稱之為「自變數(或自變量)，通常以 x 表示」，因為「自變數」的改變，依循既定規則而改變的量，稱之為「應變數(或應變量)，通常以 y 表示」。此時，我們就稱 y 是 x 的函數。

例 1：飲料販賣機投 10 元，可以得到 1 瓶飲料，我們就稱這種關係叫函數。

正常狀況下，10 元就會得到一瓶飲料，我們把這種對應關係稱之為「一對一」函數。

例 2：到棒球場看職棒，售票說明如下：

100 公分(不含 100 公分)不用買票；100 公分至 140 公分(不含 140 公分)半票；140 公分以上全票。根據這個說明，我們可以瞭解這樣的購票行為也是一種函數，我們可說「票別」是「身高」的函數。

進一步思考，不同的身高可能會對應到同一種票別，列舉如下:

身高	76	91	110	123	128	139	144	160
票別	免票	免票	半票	半票	半票	半票	全票	全票

我們稱這種對應關係叫作「多對一」函數，也就是很多個身高，對應至一種票別，這是合理的可能。

那麼情形是不太合理的呢？延續上例來說明，如果某一個棒球場它的賣票規矩很奇特，對於 110 公分的觀眾一下子說是「免票」，過一陣子又變成「半票」，最後還會隨心情的起伏，賣給觀眾「全票」，您如果遇到這種無厘頭的販賣方式，那不氣瘋了，買貴的人一定得找負責人理論才怪。

為什麼這個例子這麼地令人無法接受?只因為它沒有「數學味道」，「一對多」太不符合我們的習慣，因此函數的對應關係是沒有「一對多」的。

【小結】1 函數是一種對應關係。

2 函數的對應關係只有兩種，「一對一」與「多對一」;而「一對多」不是函數關係。

◆函數的分類

若以 y 是 x 的函數來說，由於 y 是隨著 x 而改變，所以，我們可以把注意力放在 x 身上。以 x 的次方來決定，y 是一個什麼樣的函數。

(1) 當 x 是 0 次方，也就是常數時，我們把它叫作常數函數，也叫作零次函數，如 y =2 , y =-4, y=0.5 都是。

【注意】但是習慣上，0(零)不叫作零次函數，而是稱為「零函數」。

(2) 當 x 是 1 次方，我們把它稱為一次函數，也叫作線型函數，如 y =3x , y =-4x, y=0.5x 都是。

(3) 當 x 是 2 次方，我們把它稱為二次函數，如 $y=2x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=-6x^2$ 都是。

(4) 當 x 是 3 或以上，仍然依此類推。

◆函數的值

不管是幾次函數，其函數值的計算方式都相同，也就是將 x 的值代入式子中，求出 y 之值。

例如　y =3x，當 x=1 時之函數值=?　y =3×1=3

y =-4x, 當 x=-2 時之函數值=?　y =(-4)×(-2)=8

y = $2x^2$,當 x=5 時之函數值=?　y=2×5×5=50

y = $\frac{1}{3}x^2$ 當 x=3 時之函數值=?　$y=\frac{1}{3}\times 3^2$=3

數學家為了方便表示函數，也利用了一個符號來表示函數：y=f(x)　，其中 f 是 funtion 的第一個字母。

利用這個符號來表示函數，y =3x 就可以寫成 f(x)=3x，從 f(x)=3x 這個式子更可以發現函數完全是被 x 所「控制」了。

因此 y =3x，當 x=1 時之函數值=? 可以改寫成 f(x)=3x, 求 f(1)=? 明顯地 f(1)=3×1=3

好了，來挑戰一下你的反應能力，已知 f(x) = $3x^2$　，求 f(f(-2))之值=?

首先想想看，f(f(-2))是什麼意思呢？它的意思是在 f(　)裡面放入一個數字叫「f(-2)」，但是 f(-2)又是多少呢？f(-2)=$3\times(-2)^2$ =12，所以 f(f(-2))=f(12)= $3\times(12)^2$ =3×144=432。

例：f(x)=3x, g(x)=$\frac{1}{2}x$，求 f(g(1))=?

有了上一題的經驗，你應該知道先作 g(1)，再將 g(1)的值代入 f(x)中，

因此 f(g(1))=f($\frac{1}{2}$)=$\frac{3}{2}$

類似這樣的題目，我們把它稱之為「合成函數」，表法為　$f\circ g = f(g(x))$

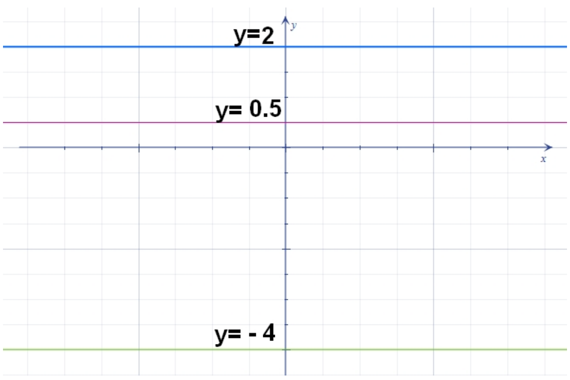
◆函數的圖形

我們已經知道函數是以 x 的次方來分類的，所以不同類型的函數畫起來的圖形是否會相同?有哪些特性呢?

通常函數的畫圖，常用的方法是描點法，要描多少個點呢?當然是愈多愈好…

一　、常數函數

y =2 , y =-4, y=0.5



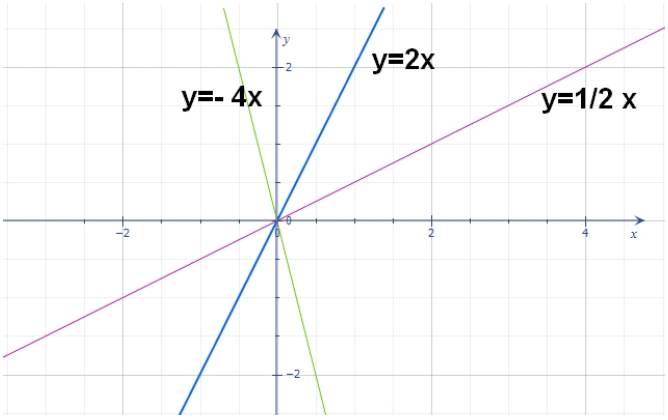
特性：都是垂直 y 軸（平行 x 軸）的直線，也稱之為線型函數。

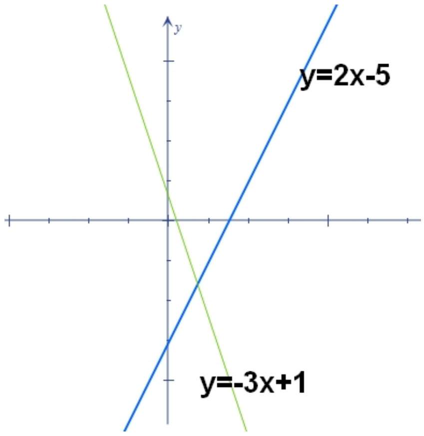
想一想：若是 x=3, x=-7 畫起來的圖形會是什麼樣子呢？

二 、一次函數

y =3x , y =-4x, y=0.5x　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　y=2x-5　　y=-3x+1

圖示:





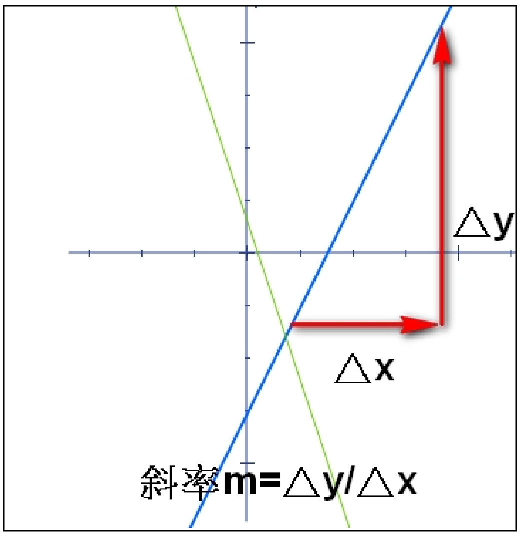
特性：1 都是直線的型態，所以也稱之為「線型函數」。

2 通過原點的直線(如 y =3x , y =-4x, y=0.5x)，都沒有常數項。

3 往右上的圖形(如 y=2x+5)x 的係數是「正數」，往左上的圖形(如 y=-3x+1)x 的係數是「負數」　。

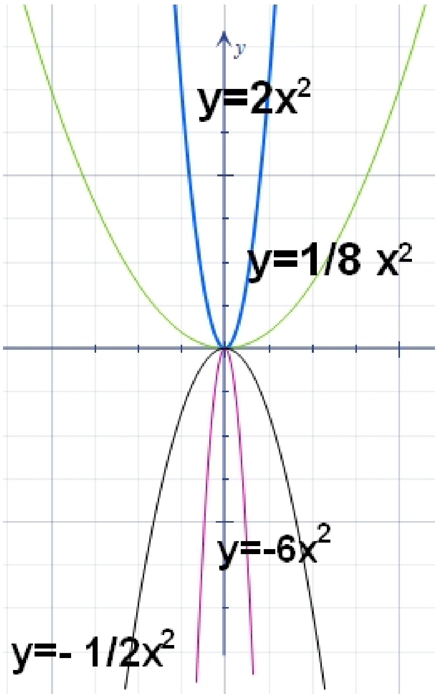
【小常識】第 3 點中提到的 x 係數的方向性，在數學上稱之為「斜率」，意思是 x 每增加 1 單位，y　會上昇多少個單位?

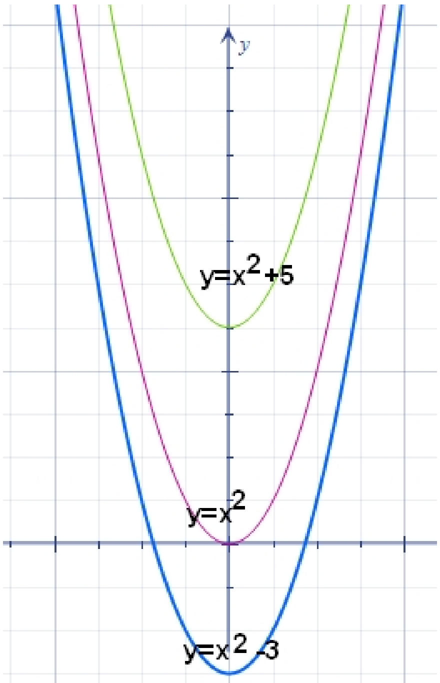
此外，規定圖形往右上的斜率為正，圖形往左上的斜率為負。



三 、二次函數

$y=2x^2$ ，$y=\frac{1}{8}x^2$，$y=-6x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$　　　　$y=x^2$　　$y=x^2+5$　　$y=x^2-3$





特性：1 都是平滑曲線，因此二次函數的圖形也稱之為「拋物線」。

2 若以 $y=ax^2$ 來說明(左圖)，

a>0，拋物線開口向上，數字愈大，開口愈小，數字愈小，開口愈大。

a<0，拋物線開口向下，若不管正負，數字愈大，開口愈小，數字愈小，開口愈大。

換句話說，a 的正負號決定拋物線開口的上下，而 a 的絕對值大小則決定了開口的大小，|a|愈大，則拋物線的開口愈小，反之，開口則愈大。

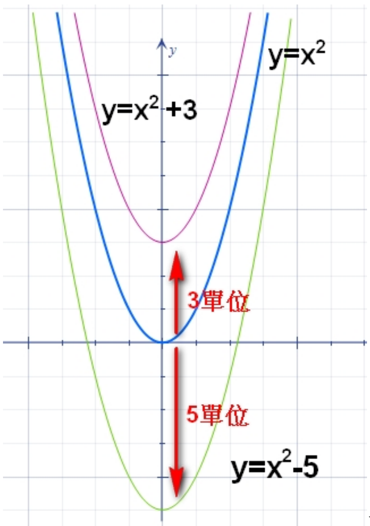
3 若以 $y=ax^2+b$ 來觀察(右圖)，

b>0 與 y 軸的交點在 x 軸的上方 b 格

b<0 與 y 軸的交點在 x 軸的下方 b 格

4 換個角度，我們也可說， $y=ax^2+b$ 的圖形是把 $y=ax^2$ 的圖形在 y 軸上下移動 b 格，這個結論，我們稱之為圖形的「平移」。

【小結論】



← 在 y 軸方向的平移