

國中數學老師來不及教的內容

因應九年一貫課程的實施，編寫教材所依據的課程標準改成了能力指標，在此個銜接的過程當中，國中課程的高中課程與國中課程有相當程度的落差，所以這幾年來同學們上高中之後，都需要先上數學的銜接課程，來縮短課程的落差。

參考台南市數學國教輔導團廖芳浴老師的研究，廖老師在國高中銜接上一些建議，老師將這些建議列為未來周六加強課程的學習參考重點，簡述如下：

一、介紹直線方程式時加入「斜率」的概念。

課程加入「斜率」之後，讓學生能為高中課程直線方程式的學習作準備，同學會比較容易接受「兩點式」、「點斜式」、「斜截式」、「截距式」等直線的求法與觀念。

二、乘法公式的補充介紹。

除了課程中提及的完全平方式與平方差公式之外，更要多介紹立方和、立方差、和的立方、差的立方等公式，情形許可的話，可以再推廣至

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \text{ 及 } x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1) \quad n \text{ 為奇數。}$$

甚至是 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

三、因式分解的補充。

1. 利用完全平方式及平方差公式進行因式分解。

例：因式分解 $n^4 + n^2 + 1$

例：n 為正整數，且 $n^4 - 6n^2 + 25$ 為質數，求 n=?

2. 一般因式分解的應用。

例：設 x、y 均為整數，且 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$ ，試求 x、y=?

四、對實數系作一個完整的介紹與分類。

在介紹完平方根與根式之後，可利用幾何作圖介紹如何在數線上畫出無理數；介紹「算術平均數大於幾何平均」這個重要的性質；特別說明

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$? $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$? 以及「二重方根」的化簡；延伸介紹至三次方根的運算。

例： $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=?$ $\sqrt{8+\sqrt{28}}=?$ $\sqrt{14-8\sqrt{3}}=?$ $\sqrt{4-\sqrt{7}}=?$

五、將實係數二次方程式的公式解作延伸。

當 $a \neq 0$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

當 $a \neq 0$ $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根為 α, β ，則 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$ (根與係數的關係)

三次方程式呢？推廣至 n 次方程式根與係數的關係。

例：已知 $3x^2 + 2x + 5 = 0$ 的兩根為 α, β ，試求

(A) $\frac{1}{3\alpha^2 + 5} + \frac{1}{3\beta^2 + 5}$ (B) $(3\alpha^4 + 2\alpha^3 + 5\alpha^2 + 7\alpha + 2)(3\beta^4 + 2\beta^3 + 5\beta^2 + 7\beta + 2)$

例：解以下方程組

$$\begin{cases} a^3 + xa^2 + ya + z = 0 \\ b^3 + xb^2 + yb + z = 0 \\ c^3 + xc^2 + yc + z = 0 \end{cases} \quad \text{其中 } a, b, c \text{ 三數互異。}$$

例：已知 $x^2 + 6x + 4 = 0$ 的兩根為 α, β ，試求 $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$ 之值。

類：若 α, β 為 $4x^2 + 9x + 4 = 0$ 的兩根，試求 $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$ 之值。

六、介紹絕對值不等式。

七、介紹邏輯推理概念。

八、介紹高中向量常會應用的一些幾何補充性質：

1 相似

2 內、外分比

3 三角形的內心、外心、重心、垂心

4 圓的概念與性質

◆熱身題：

1. 計算 $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + \dots + 2006^{2007} + 2007^{2007}$ 之值後，必為下列何者的倍數？

(A)2 (B)4 (C)6 (D)8 (E)2008

2. 若 α, β 為 $x^2 - 5x + 7 = 0$ 的兩根，試求 $\frac{\alpha^3}{\alpha^2 - 7} + \frac{\beta^3}{\beta^2 - 7}$ 之值。

3. 設 $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ 的小數部份為 x ，請問 x 之值 = ？

多說一些因式分解

◆有關因式分解的基本題型：全部提、分組提【按係數或按文字】、展開重提

$$5(a-1) - 3(a^2 - a) =$$

$$(x-3y)^2 - (3y-x)^3 =$$

$$ax^2 - 4x + ax - 4 =$$

$$ab(1-c^2) + c(a^2 - b^2) =$$

$$(a-b)(x-y) + c(b-a)(y-x) =$$

$$5xy - 3x - 15y + 9 =$$

$$ay^2 + a^2xy - 2xy - 2ax^2 =$$

$$a^2 - 4ax + 2ab + 3ac - 12cx - 8bx =$$

$$a^2b + ab + ab^2 - a - b - 1 =$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) + abc =$$

台南市立忠孝國中九十六學年度第一學期二年級數理資優課程

補充講義

2007. 11. 24

◆有關因式分解的進階題型：【此補藥藥性很強，身體不適者勿勉強服用】

(A)分數型

$$1. \frac{a^2b}{2} + \frac{ab}{4} - \frac{ab^2}{8}$$

$$2. \frac{2}{5}axy - a^2y + \frac{1}{6}a^2b - \frac{1}{15}abx$$

(B)拆項法【拆中間那一項、拆最特殊的一項、拆文字最多的那一項、加減一項】

$$1. x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2. x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$3. x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$$

$$4. 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 10x - 15$$

(C)一次因式檢驗法

$$x^3 - 39x - 70$$

(D)十字交乘與雙十字交乘法

$$x^2 - 8x + 12 =$$

$$12x^2 - 50x + 8 =$$

$$3(x+4)^2 + (x+4) + 2 =$$

$$(x+y)(x+y-3) + 2 =$$

$$(xy+1)(x+1)(y+1) + xy =$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 =$$

$$x^2 - y^2 + 3x + y + 2 =$$

$$2x^2 + xy - 3y^2 + 3x + 7y - 2 =$$

以下兩題請利用雙十字交乘法來解題：

(1) 若 $x - y = \sqrt{3}$ ，則 $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3$ 之值為何？

(2) 若 $x + 2y + 1 = \sqrt{2}$ ，則 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x - 6y + 2$ 之值為何？

(E) 重組型

因式分解 $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3) - 24x^2$

因式分解 $(x+2)(x+4)(x+6)(x+12) + 3x^2$

因式分解 $(x^2 - x - 5)(x^2 - x - 9) - 21$

因式分解 $(x^2 - x - 6)(x^2 + 3x - 4) + 24$