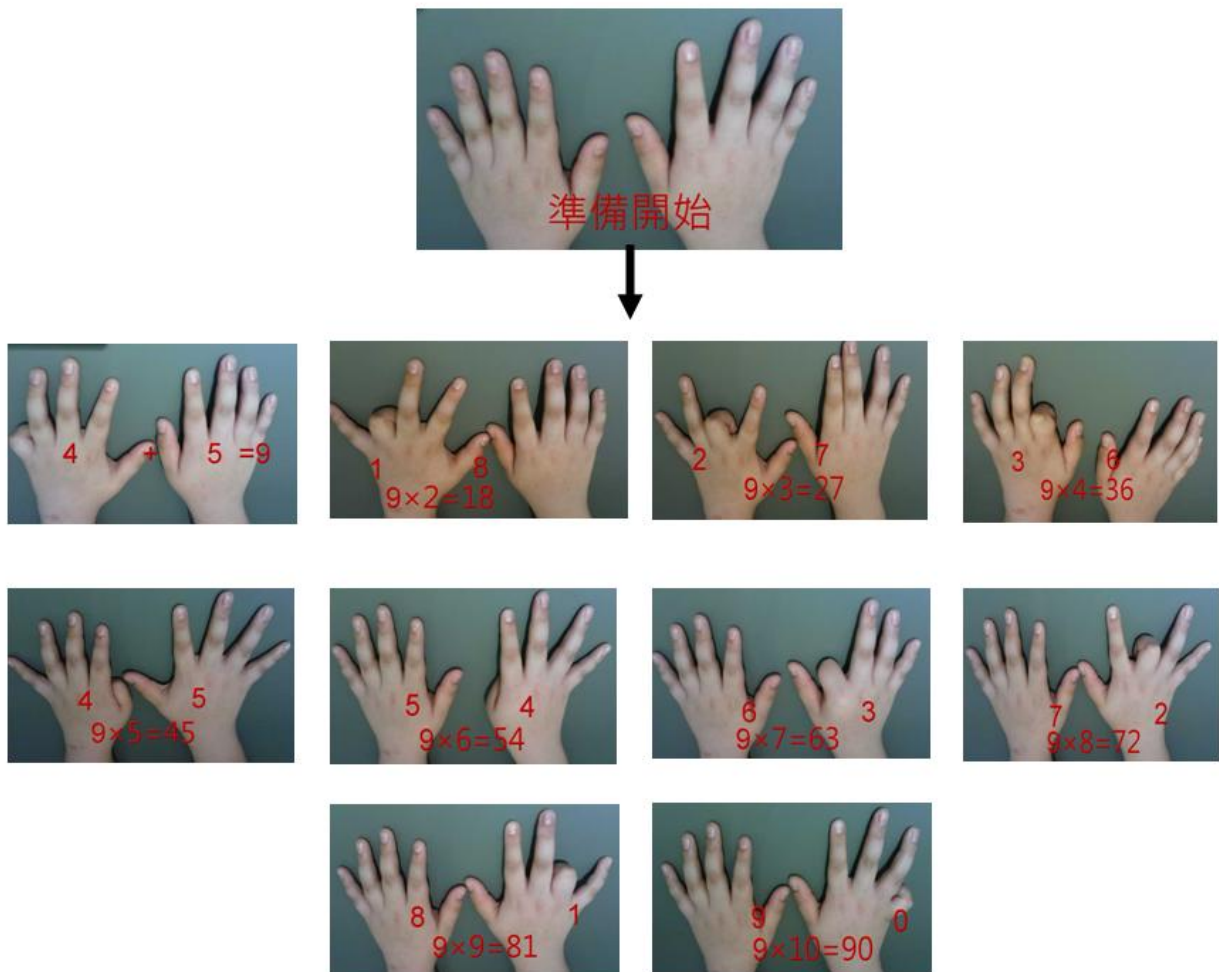


# 數字 9 的秘密

9 這個數字似乎有一種魔力----具有一種令人敬畏的秘密，比如中國人形容皇帝稱作「九五至尊」、台灣人的習俗中男性在過生日的時候，不喜歡過有 9 歲的歲數，通常會把歲數加 1，讓歲數變成 10 的倍數，因為一般人認為逢 9 是一個人生的關卡，也就是有可能有劫數，所以會巧妙地避開了這個令人困擾的數字。

## ◆9 的乘法

9 本身擁有許多令人讚嘆的美妙特性，例如讓許多小朋友初學乘法時很頭疼的「九九乘法」表， $9 \times 1 = 9$ ， $9 \times 2 = 18$ ， $9 \times 3 = 27$ ， $9 \times 4 = 36$ ， $9 \times 5 = 45$ ， $9 \times 6 = 54$ ， $9 \times 7 = 63$ ， $9 \times 8 = 72$ ， $9 \times 9 = 81$ ，這是再平常也不過的事，但是對於初學乘法的小學三年級的小朋友來說，這些規則簡直難透了，所以老師會教小朋友用手指頭來算乘法，將兩手的手掌打開(手心或手臂朝自己都可以)，從左手開始，乘 1 時就將左手小指彎起來，乘 2 時就彎左手無名指，依此類推至右手的無名指，而 9 的乘法其答案就出現在雙手的变化上。



小朋友們會異訝它究竟是如何作到的?其實，它就是很簡單「分配律」的應用，因為  $9=(10-1)$ ，所以

$$\begin{array}{r} 9 \times 1 = (10-1) \times 1 \\ = 10-1 \\ = 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \times 2 = (10-1) \times 2 \\ = 20-2 \\ = 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \times 3 = (10-1) \times 3 \\ = 30-3 \\ = 27 \end{array}$$

依序作下去，請觀察答案 9，18，27，36，45，54，63，72，81，這 9 個數字的十位數與個位數加起竟然都是「9」耶，所以我們可以利用彎一隻手指頭的方式表示出 9 的乘法答案!

9 乘以一位數的時有這種特性，如果是將 99 乘以一個個位數又會如何呢?

$99 \times 1 = 99$ ， $99 \times 2 = 198$ ， $99 \times 3 = 297$ ， $99 \times 4 = 396$ ， $99 \times 5 = 495$ ， $99 \times 6 = 594$ ， $99 \times 7 = 693$   
 $99 \times 8 = 792$ ， $99 \times 9 = 891$ ，

明顯地，這個三位數十位數都是 9，而百位數加上個位數都是 9；而  $99 \times 10 = 990$ ， $99 \times 11 = 1089$ ， $99 \times 12 = 1188$ ， $99 \times 13 = 1287$ ， $99 \times 14 = 1386$ .....

換句話說，我們可不可以猜測：**只要「數字和」是 9 的數目字都會是 9 的倍數**?大部份的國中生都瞭解以上的說法提正確的，數學王子省略了它的推導過程，因為只要數字改寫成「十進位」的表示法（如  $abcde = a \times 10000 + b \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + e$ ），很容易就可以證明出來。

### ◆9 的除法

因為 9 讓人感覺數字很大，所以當要除以 9 時會讓人感覺有點麻煩，其實除以 9 的除法，也有一種很特別的運算方式，讓我們看一下底下的例子：

計算  $425709 \div 9 = ?$

【原作法】

$$\begin{array}{r} 37301 \\ 9 \overline{)425709} \\ \underline{36} \phantom{00} \\ 65 \phantom{00} \\ \underline{63} \phantom{00} \\ 27 \phantom{00} \\ \underline{27} \phantom{00} \\ 9 \phantom{00} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

【新作法】

$$\begin{array}{r} 37301 \\ 9 \overline{)425709} \\ \underline{3} \phantom{0000} \\ 55 \phantom{000} \\ \underline{7} \phantom{000} \\ 27 \phantom{00} \\ \underline{3} \phantom{00} \\ 9 \phantom{00} \\ \underline{1} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

這個新作法到底是怎麼來的呢？數學王子以一個小例子作說明，

計算  $41 \div 9 = ?$

$$\begin{aligned} \text{因為 } 41 &= 9 \times 4 + 5 \\ &= (10 - 1) \times 4 + 5 \\ &= 40 - 4 + 5 \end{aligned}$$

觀察餘數 5，因為  $5 = 41 - 40 + 4 = 1(\text{原來的題目末一位}) + 4(4 \text{ 就是「商數」})$ ，寫成直式，可得：

$$\begin{array}{r} 41 \\ - 40 \\ \hline 1 \\ + 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

換句話說，要計算的時候，只要將算出來的「商數」與「個位」相加，就是「餘數」了。

再計算另一題，計算  $5526 \div 9 = ?$

【原作法】

$$\begin{array}{r} 614 \\ 9 \overline{) 5526} \\ \underline{54} \phantom{00} \\ 12 \phantom{00} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 36 \phantom{00} \\ \underline{36} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

【新作法】

$$\begin{array}{r} 614 \\ 9 \overline{) 5526} \\ \underline{6} \phantom{00} \\ 12 \phantom{00} \\ \underline{1} \phantom{00} \\ 36 \phantom{00} \\ \underline{4} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

相  
加

如果除數改成 99，是不是可以利用這個方法計算呢？我們來看另外一個例子，計算  $172685 \div 99 = ?$

【原作法】

$$\begin{array}{r}
 1744 \\
 \hline
 99 \overline{) 172685} \\
 \underline{99} \\
 736 \\
 \underline{693} \\
 438 \\
 \underline{396} \\
 425 \\
 \underline{396} \\
 29
 \end{array}$$

【新作法】

$$\begin{array}{r}
 1744 \\
 \hline
 99 \overline{) 172685} \\
 \underline{1} \\
 736 \\
 \underline{7} \\
 438 \\
 \underline{4} \\
 425 \\
 \underline{4} \\
 29
 \end{array}$$

如上作法所示，仍然可以依樣畫葫蘆，只不過要修改成「商數」加上「末兩位」才是「餘數」喔。

$$\begin{aligned}
 \text{理由：} & 268 = 99 \times 2 + 70 \\
 & = (100 - 1) \times 2 + 70 \\
 & = 200 - 2 + 70
 \end{aligned}$$

觀察餘數 70，因為  $70 = 268 - 200 + 2 = 68$  (原來的題目末兩位) + 2 (「商數」)，寫成直式，可得：

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \hline
 99 \overline{) 268} \\
 \underline{198} \\
 70
 \end{array}
 \quad + \quad
 \begin{array}{r}
 268 \\
 \underline{2} \\
 70
 \end{array}$$

## ◆ 0.99999999.....的大小

數學王子記得之前到國外去玩的時候，到了他們的商店看到商品的標價，常常會出現 .9 或 .99，例如 \$6.9 或 \$9.99 這種價錢，但是結帳時好像沒找回 0.1 或 0.01 元，直接當作 7 元或 10 元呢，但是自己礙於英文程度不佳，也不敢開口問個究竟，只能在心裡吶喊「我是數學老師耶，還要找我 0.1 或 0.01 元啦。」，但是回國之後，想想數學原理，才發現外國人的心中還真是很有數學概念~

疑問： 0.99999999....和 1 比起來，誰比較大?!

聰明的你會回答，應該是 1 大嘛，它不是比 0.999999....大了 0.00000.....1 嗎?看起來似乎有道理，不過實際上並非如此喔，讓數學王子利用簡單的算式來說明給您瞧瞧。

假設  $x=0.99999999.....$

我們將兩邊，乘以 10 之後，根據等量公理會得到:

$$\begin{aligned}10x &= 9.99999999..... \\ &= 9 + 0.99999999..... \\ &= 9 + x \\ \therefore 9x &= 9 \\ x &= 1\end{aligned}$$

所以  $0.99999999.....=1$

意思就是  $0.\bar{9} = 1$

推廣思考，那麼  $0.\bar{7} = 0.7777777.....$  又是多少呢?

由  $0.\bar{9} = 1$  可以得到啟示，因為

$$\begin{aligned}0.\bar{7} &= 0.7777777..... \\ &= \frac{7}{9} \times 0.99999999..... \\ &= \frac{7}{9} \times 1 \\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

因此，我們可推得

$$\begin{aligned}0.\bar{a} &= 0.aaaaaaaa..... \\ &= \frac{a}{9}, 1 \leq a \text{ 為自然數} \leq 9\end{aligned}$$

更進一步思考，如果是有兩位循環節的循環小數又會是如何呢？  
例如：0.7272727272.....

模仿上面的作法，假設  $y=0.7272727272.....$

$$\begin{aligned}100y &= 72.7272727272..... \\ &= 72 + 0.7272727272..... \\ &= 72 + y \\ 99y &= 72 \\ \therefore y &= \frac{72}{99}\end{aligned}$$

有興趣的讀者，可以繼續嘗試不同寫法的循環小數，試著找到將它們改成分數型式的作法。

#### ◆ 還剩下多少？

相傳古代有一個富翁有 10 個小孩，其中有 9 個是領養的小孩，最後 1 個也是最小的孩子，是這個富翁親生的兒子，不過富翁為了讓小兒子能自力更生，在遺囑中說明了他的遺產的分配方式：將所有的財產分成平均分成 9 份之後，剩下的才是小兒子的財產。

若這個富翁共有 7654321000000 兩金子，請問小兒子會分得多少財產？

這個題目並不會很困難，只要將 7654321000000 除以 9，再求出它的餘數，就表示小兒子可以拿到多少錢了，但是，有沒有其他的作法呢？

事實上，的確是有快速的作法可以求出上式中的餘數，這也是除數 9 特別的地方。

以  $3459 \div 9$  為例，

$$\begin{aligned}\text{因為 } 3459 &= 3 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 9 \\ &= 3 \times (999 + 1) + 4 \times (99 + 1) + 5 \times (9 + 1) + 9 \\ &= [3 \times 999 + 4 \times 99 + 5 \times 9] + [3 + 4 + 5 + 9] \\ &= 9 \times [3 \times 111 + 4 \times 11 + 5] + [3 + 4 + 5 + 9]\end{aligned}$$

所以  $3459 \div 9$  的餘數就是  $[3 + 4 + 5 + 9] \div 9$  餘數，

而同理  $[3 + 4 + 5 + 9] \div 9$  的餘數

$$\begin{aligned}&= 21 \div 9 \text{ 的餘數} \\ &= (2 \times 10 + 1) \div 9 \\ &= [2 \times (9 + 1) + 1] \div 9 \text{ 的餘數} \\ &= [2 \times 9 + (2 + 1)] \div 9 \text{ 的餘數}\end{aligned}$$

餘數 = 3

換句話說，一個數字除以 9 的餘數就是它的數字和不斷地除以 9 最後剩下的餘數。

$$\begin{aligned} & \text{因此 } 7654321000000 \div 9 \text{ 的餘數} \\ & = (7+6+5+4+3+2+1) \div 9 \text{ 的餘數} \\ & = 28 \div 9 \text{ 的餘數} \\ & \text{餘數為 } 1 \end{aligned}$$

意思是小兒子只能分到 1 兩黃金，看來這個爸爸真的是打定主意要兒子能自立自強，靠自己的雙手建立家園囉~