

小試身手—第九屆國中二年級奧林匹克試題

1~20 題每題 7 分，第 21~30 題，每題 10 分，共 240 分

1. 計算 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$ 之值

2. 解 $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$

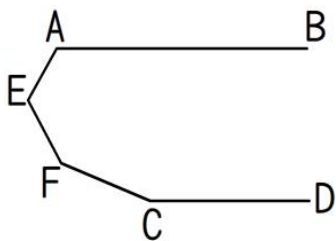
3. 解 X 的方程式 $2(a-1)(a-2)x+4(3a-1)x-6a = a^2$

4. 同時滿足 $6x+\frac{6}{7} > 4x+7$ 和 $8x+3 < 4x+50$ 的整數 X 有多少個?

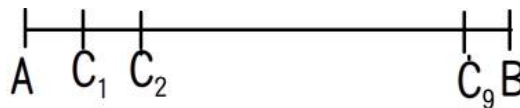
5. 如下圖一，若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，那麼 $\angle A + \angle E + \angle F + \angle C = ?$

6. 如圖二所示，線段上有 9 個點，依次記作 C_1, C_2, \dots, C_9 ，那麼以 A,

C_1, C_2, \dots, C_9, B 中的兩點為端點的線段共有多少條?



圖一



圖二

7. 若多項式 $f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$ 能被 $(x-1)^3$ 整除，試求 a, b, c 之值。

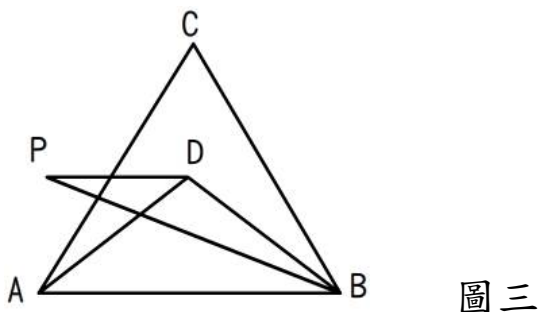
8. 當 $a+b+c=0$ ， $a^2+b^2+c^2=1$ 時，試求下列各式之值。

(1) $bc+ca+ab$ (2) $a^4+b^4+c^4$

9. 當時間 2 點 15 分時，其時針與分針的夾角為幾度?

10. 若 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，則 $\frac{2x+3xy-2y}{x-y-2xy}$ 之值為何?

11. 關於 $x^2 - x + 1 - m = 0$ 的兩實根為 α, β , 滿足 $|\alpha| + |\beta| \leq 5$, 則 m 的取值範圍為何?
12. 有農藥一桶, 倒出 8 公升之後, 用水補滿, 然後又倒出 4 公升, 再用水補滿, 此時農藥與水的比為 18:7, 則此桶的容積為何?
13. 分解因式 $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 120$
14. 設 $a + b + c = 0$, 試求 $\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}$ 之值
15. 若 $\sqrt{2a^2 - 2a - 3}$ 與 a 是相反數, 則 $a = ?$
16. 化簡根式: $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$
17. 已知 $x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, 求 $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2}$ 之值。
18. 如圖三, D 是正三角形 ABC 內的一點, 已知 $\overline{AD} = \overline{BD}$, $\overline{BP} = \overline{AB}$, $\angle DBP = \angle DBC$, 則 $\angle BPD = ?$



19. 解方程式 $(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 6 = 0$
20. 方程式 $x^2 - (a + 8)x + 8a - 1 = 0$ 有兩個整數根, 試求整數 a 之值。
21. 若 $abc = 1$, 解方程: $\frac{2ax}{ab + a + 1} + \frac{2bx}{bc + b + 1} + \frac{2cx}{ca + c + 1} = 1$
22. 已知 $a = 1990x + 1989$, $b = 1990x + 1990$, $c = 1990x + 1991$, 請問 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = ?$
23. 試證 $8x^2 - 2xy - 3y^2$ 可化為具有整係數的兩個多項式的平方差。

24. 當 a 取哪些值時，方程式 $|x+2|+|x-1|=a$ 有解？

25. 將真分式 $\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}$ 化簡為最簡部份分式？

26. 若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ，求 $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$ 之值。

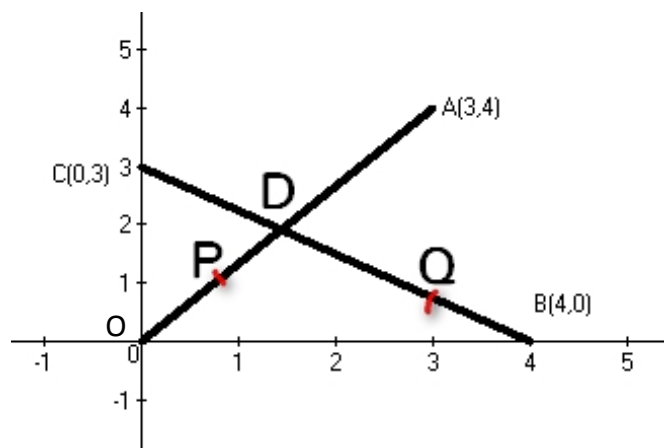
27. 一個能裝 40 公升的水缸，裝有進水的甲管與放水的乙管。甲管注滿這水缸所需的時間，比乙管流出 66 公升水所需時間少 3 分鐘；在 4 分鐘的流量，甲管比乙管少 1 公升。求甲管注滿這水缸所需的時間。

28. 如圖四，已知 $A(3, 4), B(4, 0), C(0, 3)$ ，若 P 沿 \overline{OA} 方向至 A ， Q 沿 \overline{BC} 至 C ， P, Q 維持一定的速率，請問

(1) 求 D 點座標？

(2) P 至 A 點需花 5 秒，則 P 至 D 點需花多少秒？

(3) Q 至 C 需花 5 秒，若 P, Q 分別自 O, B 同時出發，則 \overline{PQ} 平行 y 軸時，需花多少秒？



圖四

29. 拋物線 $y=x^2$ 上的三點 A, B, P ，其 x 座標分別為 $-1, 2, t$ ，且 $-1 < t < 2$ ，

(1) 將 $\triangle ABP$ 的面積 S 以 t 表示

(2) 求 $S=\frac{15}{8}$ 時， t 之值。

30. 若 $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ ，求 $\frac{x+3+\sqrt{x^2+8x}}{x+3-\sqrt{x^2+8x}}$ 之值。