

【數學補救教學活動設計】等差級數求和公式的理解

姓名 蘇恭弘 臺南市立忠孝國中/臺南市國中數學輔導團
張靖宜 臺南市立後甲國中/臺南市國中數學輔導團

一、實施對象：二年級（一般班級 攜手課輔班級）

二、教學目標

| | |
|------------|---|
| 主 題 | <input checked="" type="checkbox"/> 數與計算 <input type="checkbox"/> 量與實測 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率 |
| 相關分年細目(97) | 8-n-06 能理解等差級數求和的公式，並能解決生活中相關的問題 |
| 教學目標 | 讓同學理解等差級數求和公式的由來，並能試著解決生活情境中的問題 |

三、學習難點

- 學生常常是將等差級數求和的公式背下來，如果遇到符合公式的樣子的數據，就會答對，但是若題意稍作調整，就無法正確解題。

四、補救教學內容處理：簡化 減量 分解 替代 重整

- 調整時可採一種或多種方式進行
- 教學規劃以 1-2 節課能達成為原則
- 涉及教學目標調整幅度較大者請謹慎使用並清楚說明

| 教學處理 | 內容說明 |
|------|-------------------|
| 簡 化 | 調整教學目標內涵之難度或認知程度 |
| 減 量 | 減少教學目標內涵的內容份量 |
| 分 解 | 將教學目標分解為幾個小目標進行教學 |
| 替 代 | 將教學目標以另一種方式或表徵來達成 |
| 重 整 | 以生活化或功能性的型態達成教學目標 |

五、教學規劃與實施

（一）設計理念

一般教師在推導等差級數公式時，經過解說之後，最後通常會以「梯形公式」來說明，但是有了這個簡易的結論，雖然可以讓多數的學生作出題目，但是對於學習落的學生並無法理解，等差級數求和的公式與「梯形公式」有任何關連，本教案嘗利用操作與實例的說明，讓學生體會與理解等差級數求和的公式。

(二) 教學活動

| 主要問題與活動 | 說明與評量重點 |
|--|--|
| <p data-bbox="240 255 820 331">一、由生活中的實例，請同學想一想如何解決要求出總和的問題。</p> <p data-bbox="288 338 580 376">例 1: 有多少張椅子?</p>  <p data-bbox="288 719 676 757">例 2: 牆上有多少個突出物?</p>  <p data-bbox="288 1099 708 1189">例 3: 在方框內有多少個房間? (如果一個窗戶代表一個房間)</p>  <p data-bbox="288 1532 596 1570">例 4: 有多少個三角形?</p>  | <p data-bbox="853 255 1426 488">1.引起學生願意去計算的動力。 2.由生活中的物品作例子，而且從擺放不太有規律的物品，到愈來愈來規律的情況。 3.同學願意參與就給予鼓勵。</p> <p data-bbox="853 591 1091 629">例 1: 23 張椅子</p> <p data-bbox="853 732 1123 770">例 2: 21 個突出物</p> <p data-bbox="853 1164 1043 1202">例 3: 40 間</p> <p data-bbox="853 1500 1043 1538">例 4: 18 個</p> |

| 主要問題與活動 | 說明與評量重點 |
|--|------------------------------------|
| <p>例 5:有多少個紅色的磁磚?</p>  <p>例 6: 共有多少顆鐵珠?</p>  | <p>例 5: 16 個</p> <p>例 6: 120 顆</p> |
| <p>【結論】</p> <p>如果要計算的物品，沒有明顯規則的話，要計數的話很不方便;但是如果有規則的話，算起來比較快。</p> <p>二、由例 6，我們知道要真的動手去數，雖然不失為一個方法，有時候還真的挺累人的，所以，老師希望同學利用作業單上提供的方格紙，將算式畫成格子，看看改用這種方法，會不會讓同學們發現計算總和時的秘密。</p> <p>如果我們不想只是用「數」的方式解決求總和的問題，有沒有別的求法? 以計算 $1+2+3=?$ 為例: 我們可以利用塗方格的方式來計算，</p> | |

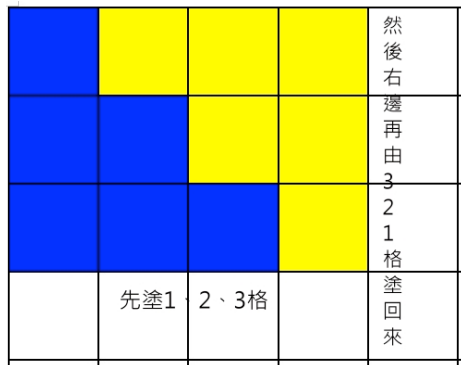
主要問題與活動

說明與評量重點

【作法】

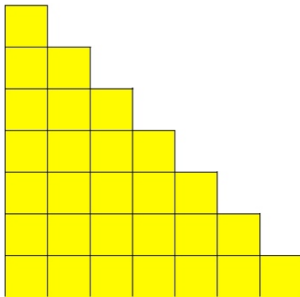
在紙上塗出 1 格、2 格與 3 格，然後在旁邊再從 3 格、2 格、1 格塗回來，同學們會發現，我們塗色的部份變成了一個長方形！

長為 4 格、寬為 3 格，所以共有 12 格，但是我們塗了 2 次，因此全部只有 $12 \div 2 = 6$

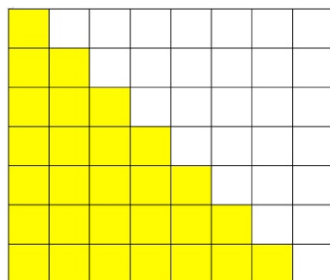


所以 $1+2+3=(4 \times 3) \div 2 = 6$

例 1: 求 $1+2+3+4+5+6+7=?$



依照上面的作法，同學們發現塗完色之後，長、寬各是多少格呢？



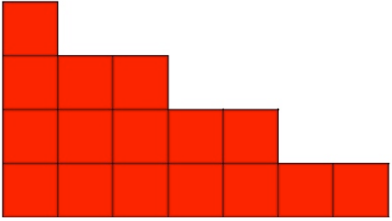
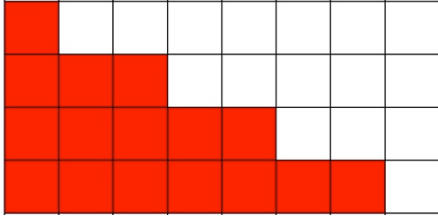
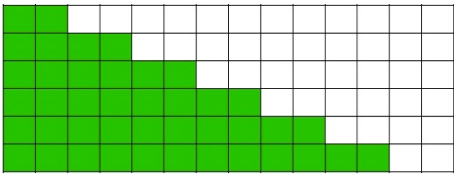
長為 8 格、寬為 7 格，所以共有 56 格，但是我們塗了 2 次，因此全部只有 56

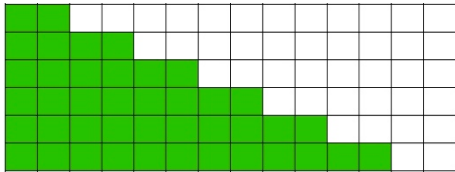
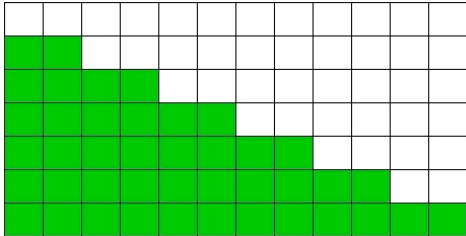
1. 鼓勵同學除了直接相加計算之外，是否可以利用「圖形」輔助，看出計算的訣竅。

2. 在方格上塗色時，可以沒有不同顏色的筆，可以讓同學，以畫斜線的方式來塗色。

◆ 也可以同學的接受度改成「剪紙」，剪成兩塊相同的紙片，再試著拼成一個長方形

註：因怕印刷時顏色不好區分，在旁邊疊合的同一塊圖形，以「空白」來表示。

| 主要問題與活動 | 說明與評量重點 |
|---|---------|
| <p>$\div 2 = 28$</p> <p>所以 $1+2+3+4+5+6+7 = (8 \times 7) \div 2$ $= 28$</p> <p>例 2: 求 $1+3+5+7=?$</p>   <p>長為 8 格、寬為 4 格，所以共有 32 格， 但是我們塗了 2 次，因此全部只有 $32 \div 2 = 16$</p> <p>所以 $1+3+5+7 = (8 \times 4) \div 2$ $= 16$</p> <p>例 3: 求 $2+4+6+8+10+12=?$</p>  <p>由上圖知，長為 14，寬為 6，所以共有 84 格， 但是我們塗了 2 次，因此全部只有 $84 \div 2 = 42$</p> <p>所以 $2+4+6+8+10+12 = (14 \times 6) \div 2$ $= 42$</p> <p>◆ 由以上的例子，同學是否發現它們都有共同的特性？ 總和可以看成一個長方形的格子數，而這個長方形的長是【第一個數字與最後一個數字相加】，而寬是【有多少個數字要相加】，最後因為我們將總和算了兩次，所以答案還需除以 2。</p> | |

| 主要問題與活動 | 說明與評量重點 |
|---|---|
| <p>以數學符號來表示就是</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\text{總和} = \frac{\text{項數} \times (\text{首項} + \text{末項})}{2}$ </div> <p>三、練習題</p> <p>1. 計算 $5+10+15+20+25+30=?$</p> <p>2. 計算 $3+6+9+12+15+18+21=?$</p> <p>3. 計算 $1.2+1.4+1.6+1.8+2+2.2+2.4+2.6=?$</p> <p>◆ 想一想，塗格子的方法是固定的嗎，會不會影響我們對於答案的計算？ 以求 $2+4+6+8+10+12=?$ 為例 原本我們的塗法是</p>  <p>如果有同學把它塗成以下的樣子，可以算得出來嗎？</p>  <p>所以 $2+4+6+8+10+12 = (12 \times 7) \div 2$ $= 7 \times 6$ $= 42$</p> <p>好像也可以，不過似乎可以變成兩個數目字相乘喔。</p> <p>重新檢驗一下，上面的其他題目：</p> $1+2+3+4+5+6+7 = (8 \times 7) \div 2$ $= 4 \times 7$ $= 28$ $1+3+5+7 = (8 \times 4) \div 2$ | <p>◆ 針對理解能力較佳的同學，可以適度地引導，利用「等差中項」求和的觀念。</p> |

| 主要問題與活動 | 說明與評量重點 |
|---|---|
| <p> $=4 \times 4$ $=16$ </p> <p> 觀察上面 3 題: $2+4+6+8+10+12=7 \times 6$ $1+2+3+4+5+6+7=4 \times 7$ $1+3+5+7=4 \times 4$ </p> <p> 有沒有發現什麼特別的事呢? 6 和 8 的等差中項是 7 3 和 5 的等差中項是 4 利用上一節提過的等前中項的概念 , 同學們可以發現: <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> 總和=等差中項\times項數 </div> </p> <p> 四、如果遇到首項、末項其中一個數字， 不是已知時，能不能求出總和呢? 例 1: 等差數列的首項為 2，公差為 3，請問 此數列前 10 個數字之和為何? 說明: 利用之前學過的末項的求法，我們可 以得到 第 10 項為 $2+3 \times 9=29$ 因此，同學們可以由總和的公式算出 此數列前 10 項之和為 $(2+29) \times 10 \div 2=155$ </p> <p> 例 2: 等差數列的第 10 項為 22，公差為 2， 請問此數列前 10 個數字之和為何? 說明: 利用等差數列的特性，我們得先算出 首 項: $\text{首項}+9 \times 2=22$ 所以首項=4 因此，同學們可以由總和的公式算出 此數列前 10 項之和為 $(4+22) \times 10 \div 2=130$ </p> | <p> 3. 盡量先不出現求 n(項數)的題目，避免 同學產生太大的困擾。 </p> <p> ◆如果同學在等差數列部份--求首項或末 項，觀念尚不清楚時，可適時再給以予說 明與練習。 </p> |

| 主要問題與活動 | 說明與評量重點 |
|---|---------|
| <p>五、練習題</p> <p>1.等差數列的首項為 3，公差為 2，請問此數列前 12 個數字之和為何?</p> <p>2.等差數列的首項為 14，公差為-2，請問此數列前 20 個數字之和為何?</p> <p>3.等差數列的第 16 項為 24，公差為 2，請問此數列前 16 個數字之和為何?</p> <p>4.等差數列的第 20 項為 30，公差為-2，請問此數列前 20 個數字之和為何?</p> | |

六、學生表現與教學省思

在教學的過程中，因為這部份的考試內容大部份屬於綜合應用類，所以當同學學會了基本的概念與作法之後，雖然他們產生了一些「數學成就感」，但是當要他們實際去解決如基測之類的考題時，同學就會顯得吃力，所以部份同學的「數學成就感」不易維持。

七、學習資源參考資料

國中翰林版教科書
數學王子的家網站

八、附件

- 如學習單或學生解題記錄
見下一頁

【數學補救教學活動設計】等差級數求和公式的理解

學習單

在以下的活動中，我們希望讓同學體會等差級數求和的公式的由來，請和老師一起來探險與挑戰。

【活動一】 猜猜看，有多少個？

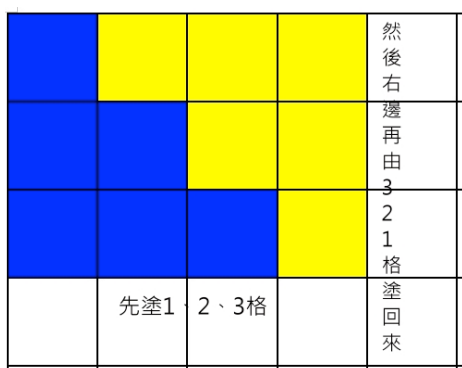
| | | |
|---|---|---|
| 例 1: 有多少張椅子? | 例 2: 牆上有多少個突出物? | 例 3: 在方框內有多少個房間? (如果一個窗戶代表一個房間) |
|  |  |  |
| 答 | 答 | 答 |
| 例 4: 有多少個三角形? | 例 5: 有多少個紅色的磁磚? | 例 6: 共有多少個鐵珠? |
|  |  |  |
| 答 | 答 | 答 |

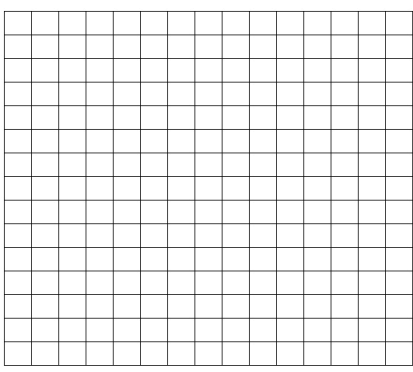
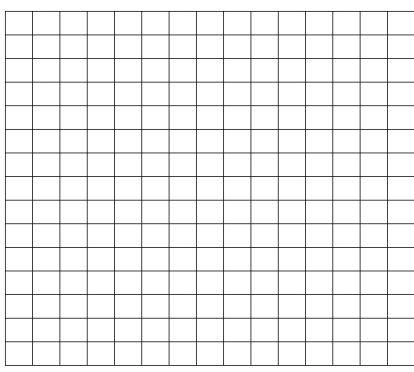
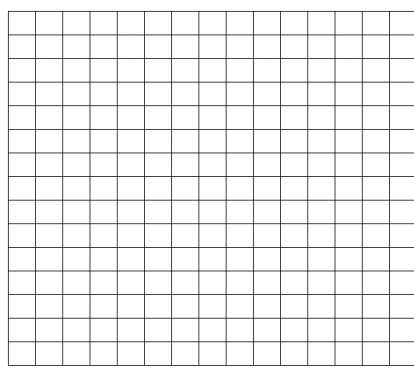
【活動二】 動手作，算總和。

由例 6，我們知道要真的動手去數，雖然不失為一個方法，有時候還真的挺累人的，所以，老師希望同學利用作業單上提供的方格紙，將算式畫成格子，看看改用這種方法，會不會讓同學們發現計算總和時的秘密。

範例: 計算 $1+2+3=?$

作法: 在紙上塗出 1 格、2 格與 3 格，然後在旁邊再從 3 格、2 格、1 格塗回來，同學們會發現，我們塗色的部份變成了一個長方形!(在方格上塗色時，可以沒有不同顏色的筆，同學們可以改用畫斜線的方式來塗色。)



| 例 1: 求 $1+2+3+4+5+6+7=?$ | 例 2: 求 $1+3+5+7=?$ | 例 3: 求 $2+4+6+8+10+12=?$ |
|--|---|--|
|  |  |  |
| 你的答案是 | 你的答案是 | 你的答案是 |
| <p>同學們，你發現了如何能計算出這些題目，比較快的方法了嗎? 你的想法是:</p> | | |
| 練習題 | | |

| | | |
|--------------------------|---------------------------|--|
| 1.求 $5+10+15+20+25+30=?$ | 2.求 $3+6+9+12+15+18+21=?$ | 3.求 $1.2+1.4+1.6+1.8+2+2.2+2.4+2.6=?$ |
|--------------------------|---------------------------|--|

【活動三】 條件改，算總和。

如果遇到首項、末項其中一個數字，不是已知時，能不能求出總和呢?

例 1:已知等差數列的首項為 2，公差為 3，請問此等差數列前 10 個數字之和為何?

說明

利用之前學過的末項的求法，我們可以得到第 10 項為 $2+3\times 9=29$

因此，同學們可以由總和的公式算出此數列前 10 項之和為

$$(2+29)\times 10\div 2=155$$

例 2:已知等差數列的第 10 項為 22，公差為 2，請問此等差數列前 10 個數字之和為何?

說明

利用等差數列的特性，我們得先算出首項: 首項 $+9\times 2=22$ 所以首項 $=4$

因此，同學們可以由總和的公式算出此數列前 10 項之和為

$$(4+22)\times 10\div 2=130$$

| | |
|---|--|
| <p>練習題</p> <p>1.已知等差數列的首項為 3，公差為 2，請問此等差數列前 12 個數字之和為何?</p> | <p>2. 已知等差數列的首項為 14，公差為-2，請問此等差數列前 20 個數字之和為何?</p> |
|---|--|

| | |
|---|---|
| 4. 已知等差數列的第 16 項為 24，公差為 2，請問此等差數列前 16 個數字之和為何? | 4. 已知等差數列的第 20 項為 30，公差為-2，請問此等差數列前 20 個數字之和為何? |
|---|---|

同學們，學會了嗎? 動手試試看，您會發現「等差級數」一點也不難喲，加油~