解一元三次方程式----卡丹公式

想法：利用乘法公式 $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

因此，只要令 $x=\alpha+\beta$，利用比較係數法，我們可以解型如 $x^3+px+q=0$ 的題目。

例 1：解 $x^3+6x-2=0$，$x^3=-6x+2$

令 $x=\alpha+\beta$，利用比較係數法可得，

$\alpha^3+\beta^3=2$，$3\alpha\beta=-6$，$\alpha\beta=-2$

$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=2\\ \alpha^3\beta^3=-8\end{cases}$ 令 A 的兩根為 α^3,β^3，則 A 的方程式為 $A^2-2A-8=0$

$$A=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\bullet1\bullet(-8)}}{2}=\frac{2\pm6}{2}=4,-2$$

$\alpha^3=4,\beta^3=-2$

$\alpha=\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{4}\omega,\sqrt[3]{4}\omega^2$

$\beta=-\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{2}\omega,-\sqrt[3]{2}\omega^2$

但因 $\alpha\beta=-2$ （α,β）=（$\sqrt[3]{4},-\sqrt[3]{2}$），（$\sqrt[3]{4}\omega,-\sqrt[3]{2}\omega^2$），（$\sqrt[3]{4}\omega^2,-\sqrt[3]{2}\omega$）

$x=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{4}\omega-\sqrt[3]{2}\omega^2$、$\sqrt[3]{4}\omega^2-\sqrt[3]{2}\omega$

例 2：解 $4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$

想法：利用乘法公式 $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

因此，只要令 $x=\alpha+\beta$，利用比較係數法，我們可以解型如 $x^3+px+q=0$ 的題目。

$x^3=\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$ 令 $x=\alpha+\beta$，利用比較係數法可得，

$\alpha^3+\beta^3=\frac{1}{8}$，$3\alpha\beta=\frac{3}{4}$，$\alpha\beta=\frac{1}{4}$

$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=\frac{1}{8}\\ \alpha^3\beta^3=\frac{1}{64}\end{cases}$ 令 A 的兩根為 α^3,β^3，則 A 的方程式為 $A^2-\frac{1}{8}A+\frac{1}{64}=0$

$$A=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\frac{1}{8}\pm\sqrt{\frac{1}{64}-4\bullet1\bullet\frac{1}{64}}}{2}=\frac{\frac{1}{8}\pm\sqrt{\frac{1}{64}-\frac{1}{16}}}{2}=\frac{\frac{1}{8}\pm\sqrt{-\frac{3}{64}}}{2}=\frac{\frac{1}{8}\pm\frac{\sqrt{3}}{8}i}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{16}$$

$$\alpha^3=\frac{1+\sqrt{3}i}{16},\beta^3=\frac{1-\sqrt{3}i}{16}$$

$$\alpha=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{16}},\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{16}}\omega,\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{16}}\omega^2$$

$$\beta=\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{16}},\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{16}}\omega,\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{16}}\omega^2$$

$$\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{16}}\omega,\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{16}}\omega^2$$

$\alpha\beta=\frac{1}{4}$ （α,β）=（$\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{16}},\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{16}}$），（$\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{16}}\omega,\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{16}}\omega^2$），（$\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{16}}\omega^2,\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{16}}\omega$）

但我們在計算方程式時，不會每一個題目都是型如 $x^3+px+q=0$ ，這時候我們該怎麼辦？

解： $ax^3+bx^2+cx+d=0$

同除 a， $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$

令 $x=y-k$ ，使得新的未知數 y 之三次方程式的二次項係數為 0

$$(y-k)^3+\frac{b}{a}(y-k)^2+\frac{c}{a}(y-k)+\frac{d}{a}=0$$

因此

$$y^3-3ky^2+3k^2y-k^3+\frac{b}{a}(y^2-2yk+k^2)+\frac{c}{a}(y-k)+\frac{d}{a}=0$$

$$-3k+\frac{b}{a}=0$$

$$k=\frac{b}{3a}$$

也就是當有一個三次方程式型如:

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

令 $x=y-\frac{p}{3}$ ，再利用上面的例 1 的作法，就能解出三次方程式的三根，此即為卡丹公式的作法。

例 3:解 $x^3+9x^2+33x+52=0$

令 $x=y-3$

原式得

$(y-3)^3+9(y-3)^2+33(y-3)+52=0$

整理後得

$y^3+6y+7=0$ ， $y^3=-6y-7$

再令 $y=\alpha+\beta$

$\alpha^3+\beta^3=-7$

$3\alpha\beta=-6,\alpha\beta=-2$

$$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=-7\\ \alpha^3\beta^3=-8\end{cases}$$

令 A 的兩根為 α^3,β^3 ，則 A 的方程式為 $A^2+7A-8=0$

$A=-8,1$

$\alpha^3=-8$

$\alpha=-2,-2\omega,-2\omega^2$

$\beta^3=1$

$\beta=1,\omega,\omega^2$

y=-2+1，$-2\omega+\omega^2,-2\omega^2+\omega$

=-1，$-2\omega+\omega^2,-2\omega^2+\omega$

所以 x=y-3

三根為 -4，$-2\omega+\omega^2-3,-2\omega^2+\omega-3$