正多面體為什麼只有 5 個?

正多面體的定義:

1.每個面都是同樣的正多邊形

2.每個頂點的邊數都相同

3.圖形都是凸的(convex)

【備註】

恭弘在網路查到的另一個定義法:

1.四個或四個以上多邊形所圍成的立體

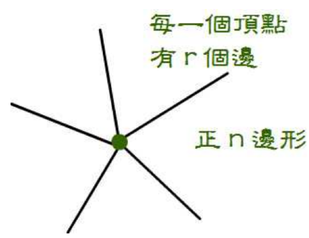
2.多面體的每一面都是全等的正多邊形

3.在每一頂點都會聚有相同數目稜邊

4.在各頂點的多面角都相等。(多面角:有公共始點的若干射線以及相鄰兩射線間的平面部分所組成的圖形)

假設有一正多面體有v個頂點、e個稜邊、f個面。每個面都是相同的正n邊形，每一個頂點都有r個稜邊會聚。

因為正n邊形每一個內角為 $\dfrac{(n-2)\times 180}{n}$



所以 $\dfrac{(n-2)\times 180}{n}\times r < 360$

$r(n-2) < 2n$

$rn-2r-2n+4 < 4$

$r(n-2)-2(n-2) < 4$

$(n-2)(r-2) < 4$

所以

$(n-2)(r-2)=1$ $n=3$ ，r $=3$ 正四面體 (正三角形組成)	$(n-2)(r-2)=2$ $n=3$ ，$r=4$ 正八面體 (正三角形組成) $n=4$ ，$r=3$ 正六面體(正立方體) (正方形組成)	$(n-2)(r-2)=3$ $n=3$ ，$r=5$ 正二十面體 (正三角形組成) $n=5$ ，$r=3$ 正十二面體(正立方體) (正五邊形組成)

上面的結論是如何推出的呢?

因為正多面體有v個頂點、e個稜邊、f個面。每個面都是相同的正n邊形，每一個頂點都有r個稜邊會聚。

所以根據歐拉公式 v+f-e=2

(1)每個面都有 n 條稜邊且每一稜都是兩個鄰面共用，因此稜邊數有 $e=\dfrac{fn}{2}$

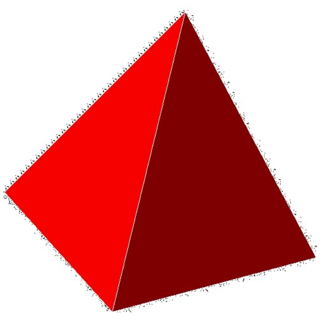
(2)每個面都有 v 個頂點且每一頂點都是 r 個稜邊(或說 r 個面)會聚的，因此頂點數有 $v=\dfrac{fn}{r}$

將(1)(2)代入歐拉公式 $\dfrac{nf}{r}+f-\dfrac{nf}{2}=2$

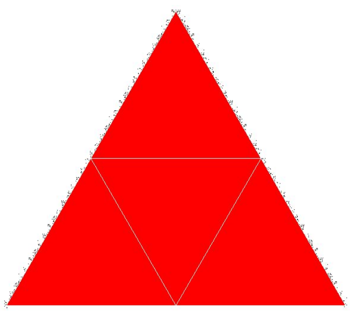
$$f(\frac{n}{r}+1-\frac{n}{2})=2$$

$$f=\frac{2}{\dfrac{2n+2r-nr}{2r}}=\frac{4r}{2n-2r+nr}=\frac{4r}{4-(n-2)(r-2)}$$

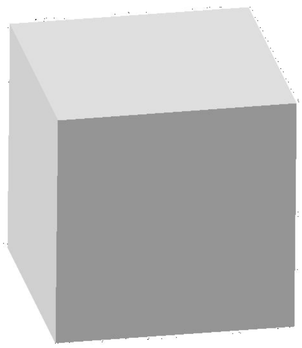
點v	面f	邊e	n	r
4	4	6	3	3
6	8	12	3	4
8	6	12	4	3
12	20	30	3	5
20	12	30	5	3



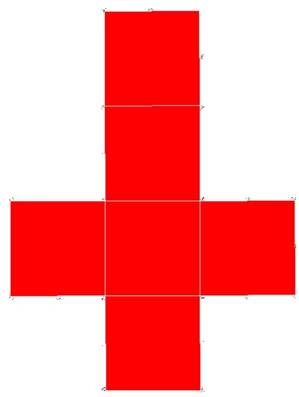
正四面體



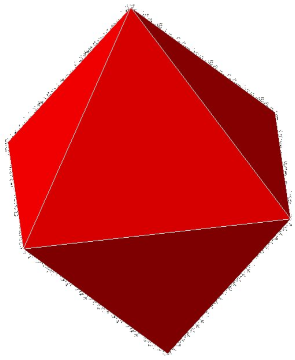
展開圖



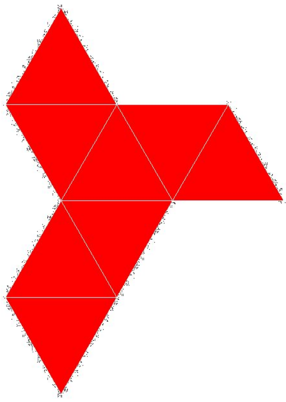
正六面體



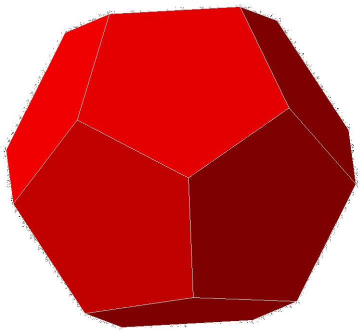
展開圖



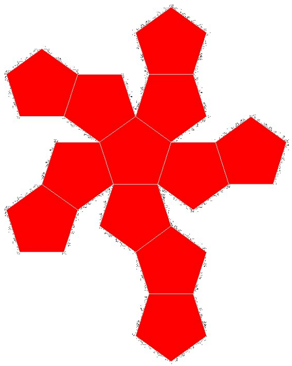
正八面體



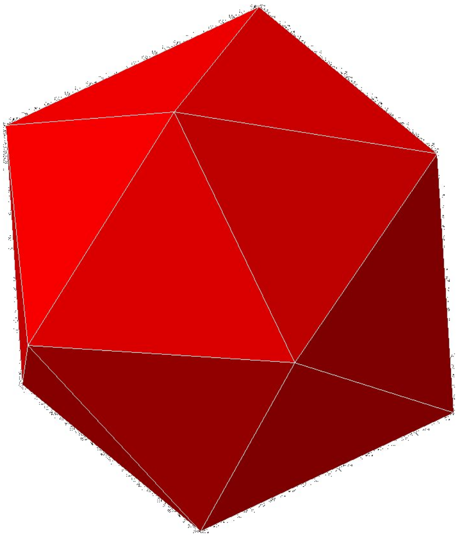
展開圖



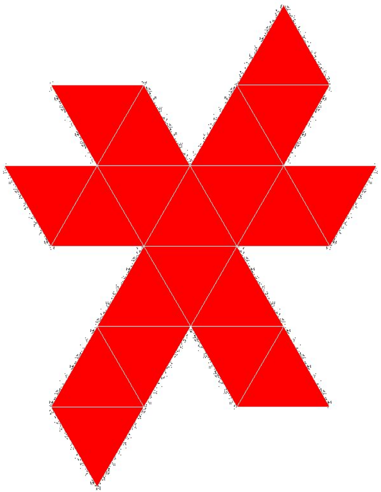
正十二面體



展開圖



正二十面體



展開圖

以上五種立體圖形又稱為「柏拉圖立體」