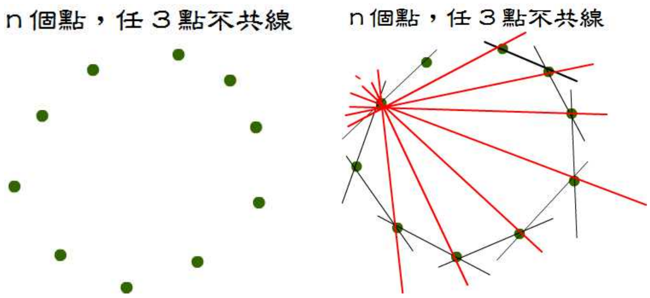
【點→線，線→平面，平面→空間】

◆題 1: 平面上有 n 個點，其中任三點不共線，請問最多可形成多少條直線?

【解一】



可連線的直線數

= n 邊+對角線總數

$= n + \frac{n(n-3)}{2}$

$= \frac{n(n-1)}{2}$

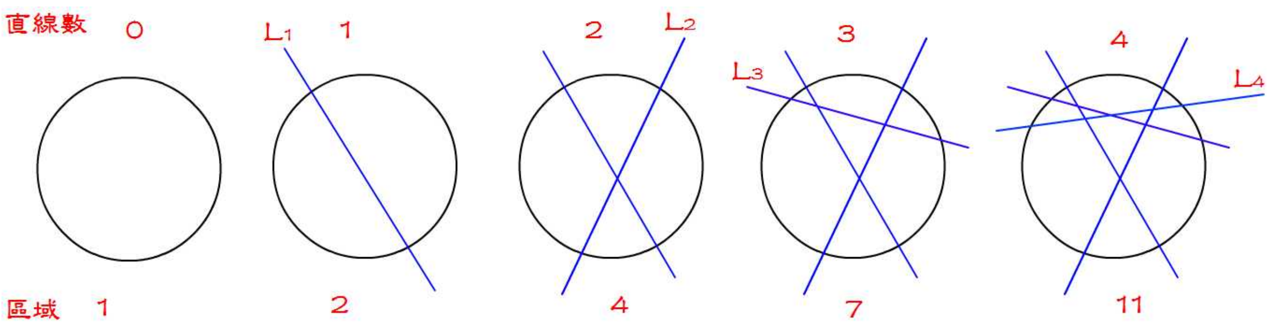
【解二】

利用組合原理計算: $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$

備註:這個題目也可以改成有 n 個人，每兩人握手一次，所有的握手次數共有多少次(不重覆計算)?

題2: 平面上有 n 條直線, 其中任何兩條不平行, 任何三條不過同一點，分割的最多平面數。

【法一】

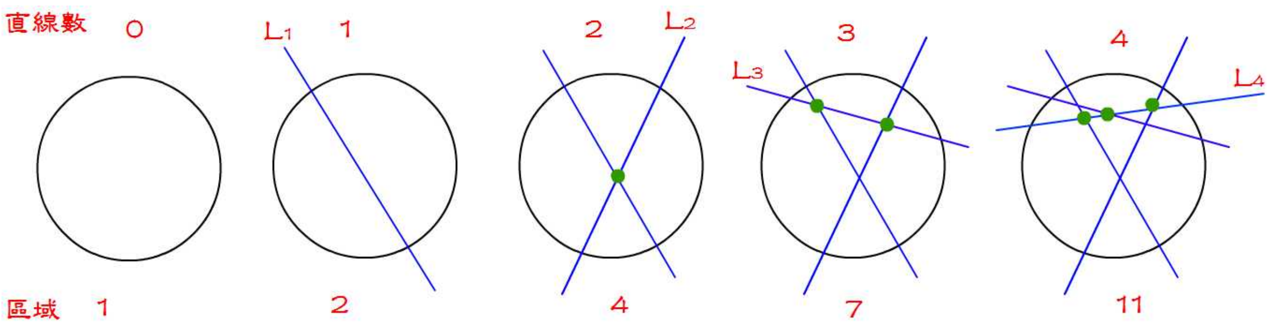


直線數	0	1	2	3	4	…
區域	1	2	4	7	11	…
觀察		+1	+2	+3	+4	+5?

猜測:當直線數=5時，區域數是11+5=16。

所以當有n條線時，區域總數為1+1+2+3+…+n=$1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$

另外從圖形觀點思考:



已有k條線時，再多一條直線，最多會有k個交點，形成了k+1線段，也就多了k+1個區域

因此當有n條線時，區域總數為1+1+2+3+…+n=$1+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

【另法】參考「從尤拉公式到空間的平面分割」---宋秉信

利用歐拉定理「(頂點數)V –(稜數)E+(面數)F = 2」

想像將多面體「壓扁」至平面，則歐拉定理會變成「V– E+F = 1」，理由是有一「面」會被疊至這個平面上，因而面數少1。

因n條直線中任何兩條不平行，所以知道在n條直線中的任何一條都與另外(n–1)條直線相交。 故每條直線上都有n條邊和(n–1)個頂點，其中每個頂點都是由兩條直線共用。

$\because$ V– E+F = 1　　$\therefore$F = E-V+1

$V=\dfrac{n(n-1)}{2}$　『每條直線上都有n條邊和(n–1)個頂點，計算了2次』

$\mathrm{E}=n^2$　『每條都與另外(n–1)條直線相交，故有(n-1)個交點，線段有n段』

$$F=n^2-\frac{n(n-1)}{2}+1$$
$$F=\frac{n^2+n+2}{2}$$

◆ 題3: 空間中上 n 個平面分割一空間的最多空間數。

【註: 指的是空間有任何兩個不平行, 任何三個不共線, 任何四個不共點的 n 個平面。】

法一: 因為圖形不好畫，所以只好靠想像一下。

平面數	0	1	2	3	4	…
空間數	1	2	4	8	?	…
觀察	+1	+2	+4	+?	+?	

當有 n 個平面時，則第 n 個平面切剩下的 n-1 個平面所增加出來的空間，就是關鍵，

借用題 2 的概念，若將圖形壓到平面去，n-1 條線會產生多少個平面呢? 答: $\dfrac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}$

因為每一平面都會產生一個立體空間。

也就是如下表:

平面數	0	1	2	3	4	…
空間數	1	2	4	8	15	…
觀察		1+1	1+1+2	1+1+2+4	1+1+2+4+7	

$$
\begin{aligned}
&=1+1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+k+2}{2}\\
&=1+1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+k+2}{2}\\
&=1+1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k+n-1\\
&=1+\frac{(n-1)n(2n-1)}{12}+\frac{(n-1)n}{4}+n\\
&=\frac{12n+2n^3-3n^2+n+3n^2-3n}{12}+1\\
&=\frac{2n^3+10n}{12}+1\\
&=\frac{n(n^2+5)}{6}+1\\
&=\frac{n^3+5n+6}{6}
\end{aligned}
$$