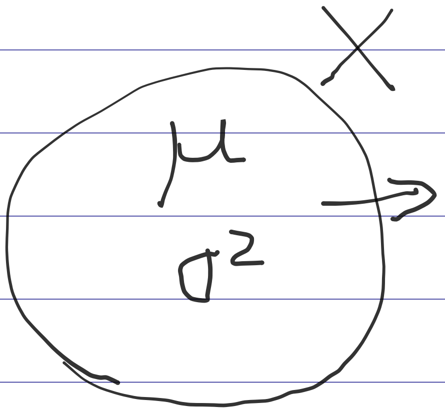
CH11 一個母數的檢定



$\rightarrow X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$ 實驗值

$x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$

顯著水準 α

(1) σ^2 已知

$$\begin{cases} H_0 & \mu = \mu_0 \\ H_1 & \mu \neq \mu_0 \\ & \mu > \mu_0 \\ & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

$\because \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\therefore \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

在 H_0 之下

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

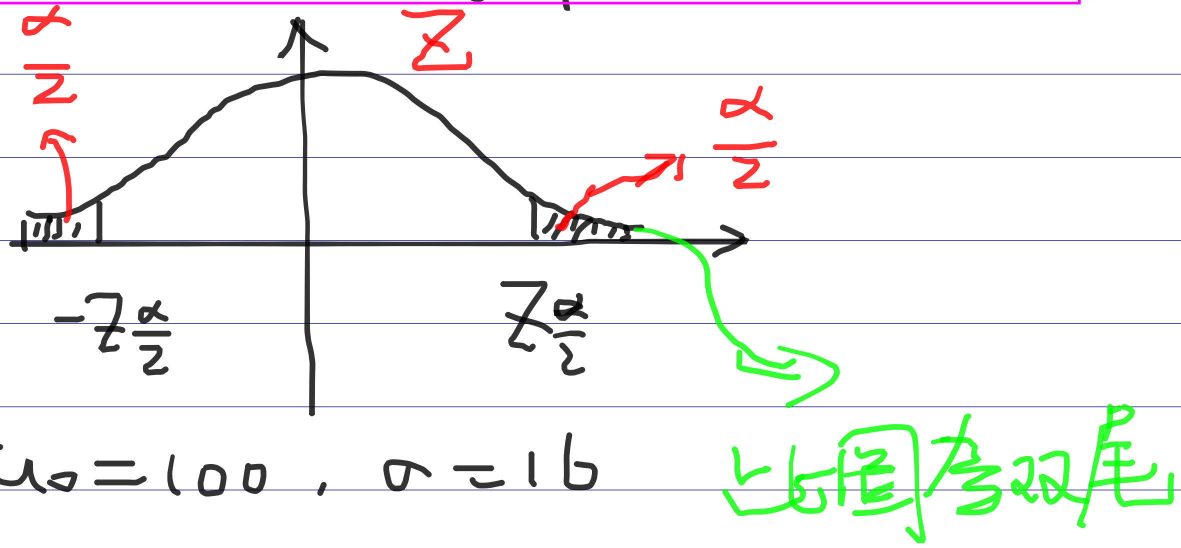
令 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

令 $P(Z > |z|) = p$

若 $p < \frac{\alpha}{2}$ 時拒 H_0

双尾檢定時

$\boxed{\text{同理 單尾檢定時 } p<\alpha \text{ 時拒 } H\text{。}}$



例 $\mu_0=100$, $\sigma=16$

$\bar{x}=103$, $n=98$

$$\begin{cases} H_0: \mu=100 \\ H_1: \mu>100 \end{cases}$$

$$Z=\frac{103-100}{\frac{16}{\sqrt{98}}}=1.86$$

$$P(Z>1.86)=0.0314<0.05$$

$\therefore$ 拒 H_0

信賴區間與双尾檢定

$$\because \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\therefore P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\because -Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

稱 $\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$

為 μ 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間

- 當 $\alpha=0.05$ $\quad Z_{0.025}=1.96$

$$\therefore \left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}1.96, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}1.96\right]$$

為μ的95%信賴區間

- 而$\alpha=0.1$. $Z_{0.05}=1.64$時

$$\therefore \left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}1.64,\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}1.64\right]$$

為μ的90%信賴區間

△ 對雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu\neq\mu_0 \end{cases}$$

$\because \bar{x}\in$接受區 $\Leftrightarrow -Z_{\frac{\alpha}{2}}\le \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$\Leftrightarrow \mu_0\in\left[\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$

例 $n=100$，$\sigma=15$．$\overline{x}=117$

檢定 $\begin{cases} H_0: \mu=100 \\ H_1: \mu\neq 100 \end{cases}$ 可求 μ 的 95%

信賴區間。

<Sol>

$\because \left[117-\frac{15}{\sqrt{100}}1.96,\ 117+\frac{15}{\sqrt{100}}1.96\right]$

$=[114.06,\ 119.94]$

此次 μ 的 95% 信賴區間為 $[114.06, 119.94]$

又 $100\notin[114.06, 119.94]$

$\therefore$ 拒 H_0。