

# 由認知負荷觀點探討 109 國中數學科會考試題難度之研究

## A Study on the Mathematics Item Difficulty of 109 Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students in the Perspective of Cognitive Load Theory

蘇恭弘<sup>1</sup> 蔡和希<sup>2</sup> 陳森杰<sup>3</sup> 林宛蓁<sup>4</sup> 林素微<sup>5</sup>

<sup>1</sup>臺南市立忠孝國民中學

<sup>2</sup>臺南市立南區新興國民小學

<sup>3</sup>國立臺南大學附屬高級中學

<sup>4</sup>臺南市立佳里國民中學

<sup>5</sup>國立臺南大學教育系

### 摘要

本研究的目的是從認知負荷的觀點，分析分析認知成分對於109年國中教育會考數學科試題難度的解釋力。研究利用數學科選擇題26題，及全國數學科共有205,012人有效施測。並以「解題步驟數」、「運算數量」、「表徵轉化」、「方程式資訊」和「情境新穎」等五項認知成分，實徵檢視認知成分編碼的適用性。測驗結果以全國有效施測人數的通過率做為試題難度，並以多元迴歸進行認知成分編碼對試題難度的預測分析。結果顯示情境新穎、方程式資訊和運算數量三項認知成分可共同解釋試題難度參數的變異達82.9%，在此三個認知成分中，情境新穎認知成分是判斷學生會考答題狀況與國中三年提升學習成效的重要成分。整體而言，本研究以109國中數學科會考試題內容和認知分析實徵文獻統整而成，模式中所得之認知成分（如情境新穎、方程式資訊和運算數量與解釋力的同時斟酌）可提供國民中學教師未來進行數學教學方向與學生學習提升的實徵參考。

**關鍵字：**認知成分、試題難度參數、迴歸分析

### Abstract

The purpose of this study is to analyze the explanatory power of cognitive components for the difficulty of Mathematics Item from 109 Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students from the perspective of cognitive load theory. The study uses 26 multiple-choice questions in mathematics and 205,012 students in mathematics subjects effectively administered the test. It examines the applicability of the coding of cognitive components with five cognitive components: "number of steps to solve the problem", "number of

operations", "representation transformation", "equation information" and "novel situation". The test results are based on the pass rate of the effective number of test takers nationwide as the difficulty of the test questions, and carried out the prediction analysis of the difficulty of the test questions by the cognitive component coding with multiple regression. The results show that the three cognitive components of context situation, equation information and operation quantity can jointly explain the variation of the item difficulty parameters of the test questions up to 82.9%. Among the three cognitive components, the context situation cognitive components are important components to judge the status of students' examination, answer questions and improve the learning effectiveness in junior high school. On the whole, this study is based on the content of the Mathematics Item from 109 Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students and the actual cognitive analysis literature. The cognitive components obtained in the model (such as context situation, equation information, operation quantity and explanatory power) can provide the secondary school teachers practical references for the direction of mathematics teaching and the improvement of students' learning in the future.

**Keywords: Cognitive Components, Item difficulty parameters, Regression Analysis**

---

蘇恭弘 Goung-Horng Su

臺南市立忠孝國民中學教師

Teacher, Tainan Municipal Jhongsiao Junior High School

電子郵件 d10711002@stumail.nutn.edu.tw

<sup>2</sup> 蔡和希 Ho-Hsi Tsai

臺南市立南區新興國民小學教師兼衛生組長

Section Chief of Hygiene, Tainan Municipal South District Sinsing Elementary School

電子郵件 d10811002@stumail.nutn.edu.tw

<sup>3</sup> 陳森杰 Sun Chieh Chen

國立臺南大學附屬高級中學校長

Principal, The Affiliated Senior High School of National University of Tainan

電子郵件 d10711001@stumail.nutn.edu.tw

<sup>4</sup> 林宛蓁 Wan-Chen Lin

臺南市立佳里國民中學教師

Teacher, Tainan Municipal Jiali Junior High School

電子郵件 d10511003@stumail.nutn.edu.tw

<sup>5</sup> 林素微 Su-Wei Lin

國立臺南大學教育系教授

Professor, Department of Education, National University of Tainan

電子郵件 swlin0214@mail.nutn.edu.tw

## 壹、研究背景與目的

國中教育會考乃為了解各國民中學學生學習狀況、確保教學品質，由教育部依據「國中畢業生學力檢定之機制」，由國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心負責命題、組卷、閱卷與計分，以達公平客觀並實踐國家課程目標。國中教育會考於民國 102 年試辦，自民國 103 年開始舉辦之全國性大型國中升學考試，做為我國國中畢業生學力檢定之機制，其目的在使每一位學生、家長、教師、學校及主管機關了解學生的學習品質，並未下一學習階段做好必要的準備，而親師生亦可參酌國中教育會考之評量結果，提供學生升學建議，輔導學生適性入學，亦可作為高中職及五專新生學習輔導之參據；每年參加此項升學考試之學生約在 20 萬人左右，此大型標準化測驗結果影響國中畢業生個人之升學、人生方向及學校與教師的辦學績效(McNamara,2000)。

數學學習與能力的建立是一項重要的公民素養，美國科學促進協會(1990)在推動的 2061 課程計畫之研究報告中針對數學本質探討，強調數學是科學的一部份，以呈現數學重要地位。數學是一種抽象概念的學習，數學的解題過程牽涉到相當複雜的心理運作過程，Sweller 等人(1998)稱數學活動為「高要素活動」(high element interactivity)的學習任務，因為學習者一方面要了解題意、記取關鍵要素的相互關係，同時要運算，若教師一次只教學生其中一個技巧，而不同時教相關的其他概念，其結果將無法使學生充分了解，因此將會導致學生未來在數學上的低成就表現。

澳洲心理學家 Sweller(1988)提出認知負荷理論，並以個體學習時所產生的互動元素量探討學習過程中是否有負擔超載來看，教材的內容安排、教學過程中的引導等，在在都影響學習者的本身；當學習者在學習的過程中，有許多與教學有關或無關的訊息，都會影響到學習者在訊息處理時工作記憶的容量，當無關的雜訊越多，則學習者的學習效果將會越差。Sweller(2010)更明白指出學習中的認知負荷總量是由內在負荷及外在負荷所組成，內在負荷是由學習材料本身複雜性、難易度所決定，而外在負荷則是素材之設計以及教學過程中所額外產生的元素互動量；若教師能在學生學習過程中，控制並降低其外在負荷，以降低認知負荷總量，則學生之學習成效便能提升。

Embretson(2007)提出試題難度認知成份分析對測驗構念效度、測驗試題設計與教

育上都有重要之意涵，試題之特徵與受試者的認知處理示一體兩面的，試題之核心引發受試者評量特質的反應，若難度參數能由試題核心成份所解釋，建構效度之立論便可更直接且具說服力。Embreston 與 Gorin(2001)認為認知心理學的原則可以用在測驗發展上的很多階段，例如定義構念、選擇試題類型、診斷成就來源及發展評量系統等；洪碧霞等人(2006)亦指出認知成份的分析可以協助教師將部分的統計資訊轉化為教學設計的參考資源。

因此，了解國三學生在數學認知層面的情形，透過分析其在國中數學科會考之表現，將可探索學生在學習上的困難。因此認知成分分析之結果可提供教學者在實務工作上的回饋，亦能透過試題難度之分析，規劃提升學生數學學習成就之教學計畫。故本研究以 109 國中數學科會考之作答結果為資料來源進行分析。本研究之研究目的與研究問題如下：

## 一、 研究目的

- (一) 發展 109 年國中數學科會考試題之認知成份，探討認知成分對會考試題難度變異的解釋力。
- (二) 探討上述認知成分架構下，不同認知成份與 109 年國中數學科會考試題難度的關聯。

## 二、 研究問題

- (一) 本研究所提出的認知成分編碼架構對試題難度參數變異的解釋力為何？
- (二) 在上述認知成分架構下，不同認知成份與 109 年國中數學科會考試題難度的關聯程度為何？

## 貳、文獻探討

### 一、 認知負荷

Sweller(1988)認為傳統的問題解決法太強調解題技巧，學習者必須使用大量的認知記憶能力，導致沒有多餘的認知能力來從事學習與獲得基模，因而造成認知負荷，認知負荷與工作記憶中的記憶單位數有關，個體若將一大堆的記憶項目儲存於工作記憶中，就容易造成過度的認知負荷。若是學習者感到學習內容的困難度越大，那麼學習者之認知負荷就會越大，不同的學習者對於相同的教材所感知的認知負荷會有所不同。

Sweller 等人(1988)提出認知負荷理論對人類認知架構(Cognitive Architecture)有四項基本假設，分別為工作記憶(Working Memory)的容量有限、長期記憶(Long-Term Memory)的容量無限、長期記憶是以基模(Schema)型態儲存以及基模運作自動化(Schema Automation)等四個基本假設。綜而言之，人類的認知結構包括有限的工作記憶以處理所有意識之活動，以及無限制容量之長期記憶以儲存不同自動化程度之基模，基模的自動化可降低工作記憶的負荷量；而認知負荷(Cognitive Load)即是將某一特定工作加諸於學習者的認知系統時所產生之負荷總量，以及訊息在工作記憶處理時的負荷總量。

### 二、 數學科認知成份分析

隨著認知心理學與心理計量理論之發展，測驗之認知分析兼顧前兩者之模式而成為構念效度重要的論述依據(Riley & Greeno, 1988)；為了設計和預估試題難度的來源和水準，必須先探究隱含在試題中可能影響難度的成份(蘇義翔、洪碧霞，2015)。

數學領域的認知成份分析，是許多學者所關心的議題。洪碧霞、林素微、林娟如(2006)以步驟數、表徵轉化、關係推衍、情境新穎、抽象邏輯等五個認知成份，針對 TASA-MAT 進行試題認知複雜度的編碼，再以認知成份為預測變項，採多元迴歸預測試題難度，結果顯示認知複雜度分析架構對跨數學內容領域試題難度變異的解釋量有 27%，再針對不同數學內容領域進行細部分析，一到兩項認知成份的預測力可達五成左右。Holling 等人(2008)以 8 個規則命題設計的 11 題統計文字題為分析標的，分析 11 至 13 年級學生的試題反應，結果顯示 LLTM 與 RASCH 模式所獲得的參數相關為 0.9，亦能有效掌握試題

的難度來源。

Embretson 與 Daniel(2008) 所提出的數學問題解決模式符合認知心理學與數學問題解決理論，其以編碼(encoding)、所需方程式(equation needed)、轉譯方程式(translate equations)、產生方程式(generate equations)、視覺化(visualization)、最大的知識(maximum knowledge)、方程式回想數量(equation recall count)、次目標數量(subgoal count)、相關的定義(relative definition)、程序的水準(procedural level)、計算次數(computational count)、決定的處理(decision processing)等 12 個認知成份，來預測 101 題難度值介於-1.80~1.80 之間的 GRE 數學問題解決之試題難度，結果顯示此 12 個認知成份能有效預測 15 題數學試題 67%的難度變異。洪碧霞、蕭嘉偉與林素微(2009)綜合 Embretson 與 Daniel 所提出的數學問題解決模式與 PISA 數學素養測驗架構，提出方程式資訊、圖形資訊、認知類別三個認知成份，對臺灣 PISA2006 試題難度參數可解釋 77%的變異量，對 PISA2003 試題難度參數可解釋 44%的變異量，整體而言，該研究所提出之認知成份分析架構，能有效解釋 PISA 數學素養試題的難度。

本研究整合洪碧霞、蕭嘉偉與林素微(2009)綜合 Embretson 與 Daniel 所提出的數學問題解決模式與 PISA 數學素養測驗架構，以及洪碧霞、林素微、林娟如(2006)針對 TASA-MAT 所進行之試題認知複雜度的編碼，提出五個認知成份編碼架構，分別為解題步驟數、運算數量、表徵轉化、方程式資訊和情境新穎，針對臺灣 109 年國中會考數學科試題進行認知成份評定，期能解釋國中會考數學科試題的難度變異，以做為教師教學改進之參考。

## 參、資料分析設計

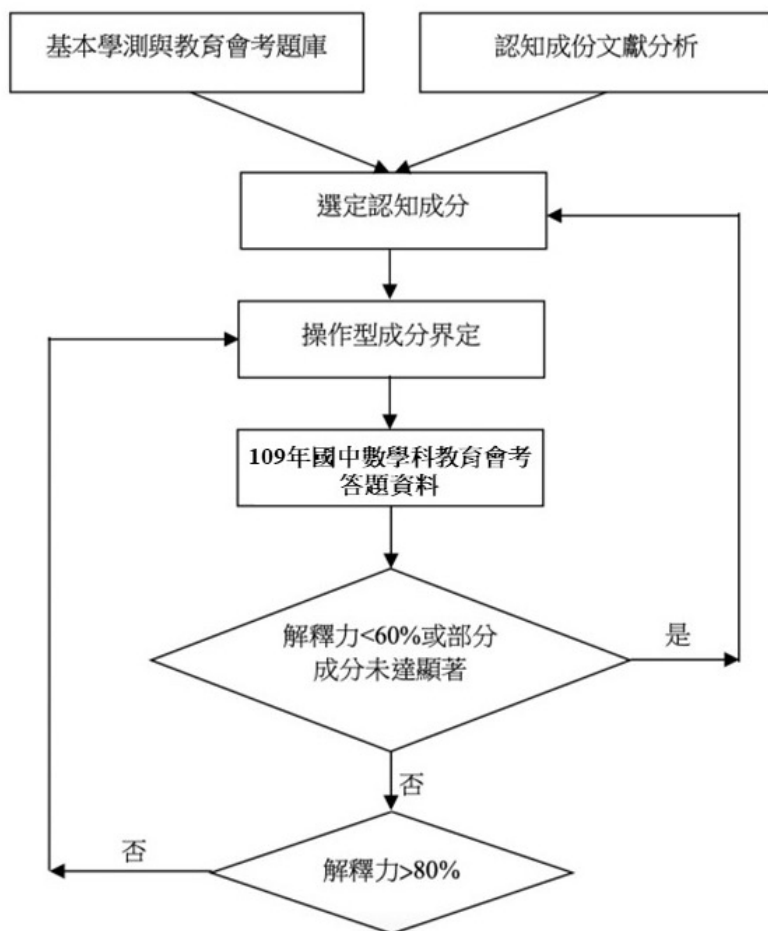
### 一、研究設計

本研究之設計流程如圖 1，目的在針對臺灣 109 年國中會考數學科試題進行認知成份評定，期能解釋國中會考數學科試題的難度變異，先從測驗試題內容領域的認知成分文獻開始分析，並歸納文獻相關要義、進而選定核心認知成分、操作性界定成分編碼邏輯、針對試題進行雙項細目分析、再以 109 年國中會考數學科施測結果所知之難度參數、檢視認知成分對試題難度的解釋力。依據文獻回顧的結論，本研究選取「解題步驟數」、

「運算數量」、「表徵轉化」、「方程式資訊」和「情境新穎」五項認知成分項目。

圖1

國中數學科會考試題認知成分分析流程圖



## 二、 資料庫來源

### (一) 國中教育會考資料庫

臺師大心測中心網站提供數據資料，介紹如下：

1. 資料來源：109年國中教育會考施測資料庫，教育會考考試科目包含國文、英語、數學、社會、自然及寫作測驗，其中數學科共有205,012人有效施測。
2. 試題：國中教育會考透過標準參照評量的方式，以3等級呈現成績，其中數學科以《國民中小學九年一貫課程綱要》數學領域國中階段的能力指標為命題依據，主要是評量國中畢業生的數學能力。數學科試題避免特殊、繁瑣的解題方法，以核心、重要的知識與能力為評量重點(109年國中教育會考試題說明)。

## (二) 國中教育會考數學科試題說明

### 1. 雙向細目表分析

依照109年國中教育會考試題說明，數學科測驗內容分為：知識理解(6題)、程序執行(5題)、解題應用(10題)、分析思考(5題)。知識理解包括理解數學學習內容之意義及定義；程序執行包括數學操作運算程序；解題應用包括應用數學性質或定理來解題；分析思考包括能應用數學知識分析試題情境，找出解題方法。在學習內容上依照課程綱要的主題分類，試題分為：數與量(6題)、幾何(10題)、代數(8題)、統計與機率(2題)(109臺師大心測中心數學科試題解析)，研究者自行將本份選擇題依認知過程向度分成四類評量架構。

本份研究使用的評量架構為「知識理解」、「程序執行」、「解題應用」、「分析思考」，由表1可以看出，本份試題在橫軸的測驗內容向度的命題數分布上，以「解題應用」的試題數最多，佔所有選擇題的38%。會考試題是國中九年級學習範圍之標準參照評量的方式，以「解題應用」的能力題目佔多數，用來檢測學生的總結性學習能力。

### 2. 各冊別之命題分布

研究者將本份試題各冊別之命題分布整理成表1，資料來源：109國中數學科會考試題試題說明、試題解析，自國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心網頁。

表1

109國中數學科會考試題試題雙向細目表

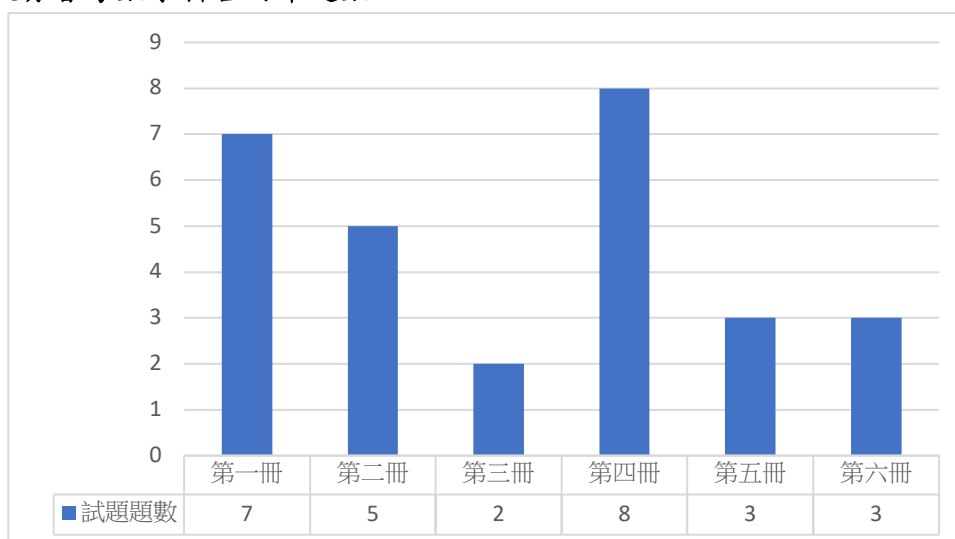
測驗內容 學習內容	知識理解	程序執行	解題應用	分析思考	命題數	比率(%)
數與量(N)	2	2	1	1	6	23%
幾何(S)	1	2	6	1	10	38%
代數(A)	2	1	2	3	8	31%
統計與機率(D)	1	0	1	0	2	8%
命題數	6	5	10	5		
比率(%)	23%	19%	38%	19%		



研究者自行將本份選擇題依測驗內容向度分成四類評量架構。可以看出，第一冊、第四冊的命題比重較高，第三冊的比重較低，本份試題在第四冊「幾何(S)」的題數佔最多，達到38%，詳見圖2。研究者分析可能的成因主要有下列兩種：(1)國中課程第四冊至第六冊都有包含幾何單元，也就是在國中數學學習過程中將近一半的時間都有含括幾何的單元，所以自然佔比的比例高。(2)因為疫情關係於108學年度第2學期開學日延後2週，第六冊考試範圍配合縮減調整，數學科只考「二次函數」、「統計與機率」，增加了幾何的比例。

圖2

109國中教育會考數學科各冊命題數



### 3. 國中教育會考109年數學科試題參數

表2為國中教育會考109年施測之數學試題通過率參數摘要對照表，由表中試題數可知共有26題，試題p值落在0.326及0.8965之間，其平均值為0.59。試題p值亦即「通過率(P)」，是指考生中答對該題的人數百分比，可視為試題難度，數值愈大代表試題愈簡單，反之則試題愈困難。

表2

通過率p參數摘要表(題數=26)

參數	平均數	標準差	最小值	最大值
通過率p	0.59	0.172	0.326	0.896

### 三、 研究樣本

數學科測驗總計 28 個試題(包含 26 題選擇題以及 2 題非選擇題)，本研究之研究樣本在量化分析部分僅採用 26 題選擇題，並未包含 2 題非選擇題，所根據之資料係報考 109 年國中教育會考的 207,210 位考生在數學科試題的作答反應。唯因缺考等關係，有效資料僅有 205,012 份，以下所有數據皆以有效資料進行計算。

### 四、 認知成份界定與編碼架構

#### (一) 解題步驟數

Dimitrov 與 Raykov (2003) 代數解題的試題難度與解題步驟有關，將其拆成十個程序，發現對試題難度有很高的影響力。TIMSS (2011) 在「應用」的認知領域分類的「模式」，說明能夠生成適當的公式或幾何圖形來解決問題。由於代數或幾何問題需運用幾何性質、定理或公式才能進行解題，因此將「解題步驟數」界定為「題目是否提供幾何性質、定理或公式以進行問題解決」。

編碼 0：題目不需使用幾何性質、定理或公式。

編碼 1：題目提供直接可套用的幾何性質、定理或公式。

編碼 2：題目未提供幾何性質、定理或公式，需由學生自行建構或進行抽象的思考。

#### (二) 運算數量

Embretson 和 Daniel (2008) 提出數學問題解決理論中包含「Computational Count」，意指解決問題所需要的計算次數。因此將「運算數量」界定為「解決問題所需進行的計算次數」。

編碼 0：解決問題的運算數量在 0~1 次者，編碼為 0

編碼 1：解決問題的運算數量在 2~3 次者，編碼為 1

編碼 2：解決問題的運算數量在 4~5 次者，編碼為 2

#### (三) 表徵轉化

TIMSS (2011) 提出「知識」領域分類中的「辨識」，指學生能分辨簡單的方位和幾何圖案；Embretson 和 Daniel (2008) 提出數學問題解決理論中包含「視覺化」，可以分辨、稱呼、比較及操弄幾何圖形，藉著觀察各種具體事物；「應用」認知領域分類中的「表徵」，將數學解題資訊和統計數據呈現在表格、圖表中或以幾何圖形以解決日常問

題；Duval (1998) 認為視覺化與構圖應獨立發展，但因構圖是形成視覺化的條件之一，避免認知成份重疊，在此將視覺化與構圖結合成一個認知成份。諸多學者 (Lesh, Post, & Behr, 1987; Dreyfus & Eisenberg, 1996; Brenner, Herman, Ho, & Zimmer, 1999; Cramer, Post, & delMar, 2002) 提到解題時學生如果能以多重表徵代表一個相同的數學概念，並在不同的表徵型式中自由轉換，即表示學生已經瞭解此數學概念，因此將「表徵轉化」界定為「題目提供解題所需圖形訊息的程度」。

編碼 0：題目不需使用圖形。

編碼 1：題目已提供直接報讀的圖形。

編碼 2：題目雖提供圖形，但解題需自行處理，如解釋圖表或圖形操作；或題目未提供解題所需圖形，需由學生自行建構或進行抽象的思考解題。

#### (四) 方程式資訊

Embretson 和 Daniel (2008) 提出解題步驟有「所需方程式」、「轉譯方程式」、「生成方程式」，並採合 Tuner、Dossey、Blum 和 Niss (2009) 提出的「符號與形式化」能夠理解、操作與瞭解數學脈絡下的符號、計算式與運算，以界定「方程式資訊」定義。在診斷學生能夠使用正規的數學符號、分數與小數的計算、或是活用數學規律、定理將題目轉譯成算式或方程式完成解題。因此將「方程式資訊」界定為「題目提供解題所需方程式或算式訊息的多寡」，並將其區分成 0~2 三個編碼：

編碼 0：題目提供直接可套用的數學方程式、算式或不需使用方程式、算式。

編碼 1：依據題目提供的文字描述可列出方程式、算式。

編碼 2：題目未提供方程式、算式，須由學生自行建構。

#### (五) 情境新穎

TIMSS 在 2011 年提出「應用」領域的認知分類中有「解決例行性問題」，內容為解決類似課堂上所遇到的標準問題；「推理」領域的認知分類中有「解決非例行性問題」，要求學生解決在實際生活中不太會遇到的試題或情境。因此將「情境新穎」界定為「題目所涉及之熟悉度」。

編碼 0：該領域內容常見於課本、習作的題型。

編碼 1：該領域內容較不常見於課本、習作的題型。

編碼 2：該領域內容罕見於課本、習作的題型。

## 五、 試題編碼示例

以下表 3 至表 7 係針對各認知成分之界定與編碼架構提出若干個試題示例，以利溝通認知成分編碼的意涵，題目來源為 109 年國中會考數學科試題。

表 3

### 解題步驟數編碼示例

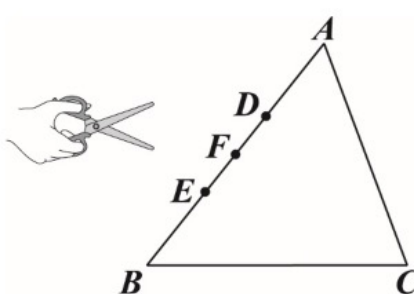
解題步驟數	<p>第 2 題</p> <p>算式 <math>2^3 \times 5^3</math> 之值為何？</p> <p>(A)30 (B)90 (C)1000 (D)1000000</p> <p>說明</p> <p>不需使用幾何性質、定理或公式，編碼為 0</p>	<p>第 16 題</p> <p>中秋節時阿柚製作的廣式月餅、蛋黃酥、鳳梨酥的數量比為 2:1:3，其中只有製作廣式月餅和蛋黃酥時使用鹹蛋黃。若阿柚製作每個廣式月餅時使用 2 顆鹹蛋黃，製作每個蛋黃酥時使用 1 顆鹹蛋黃，且總共使用 120 顆鹹蛋黃，則他製作了幾個鳳梨酥？</p> <p>(A)45 (B)60 (C)72 (D)120</p> <p>說明</p> <p>題目提供直接可套用的幾何性質、定理或公式，編碼為 1</p>
	<p>第 24 題</p> <p>圖(十七)為三角形紙片 <math>ABC</math>，其中 <math>D</math> 點和 <math>E</math> 點將 <math>\overline{AB}</math> 分成三等分，<math>F</math> 點為 <math>\overline{DE}</math> 中點。若小慕從 <math>\overline{AB}</math> 上的一點 <math>P</math>，沿著與直線 <math>BC</math> 平行的方向將紙片剪開後，剪下的小三角形紙片面積為 <math>\triangle ABC</math> 的 <math>\frac{1}{3}</math>，則下列關於 <math>P</math> 點位置的敘述，何者正確？</p> <p>(A)與 <math>D</math> 點重合</p> <p>(B)與 <math>E</math> 點重合</p> <p>(C)在 <math>\overline{DF}</math> 上，但不與 <math>D</math> 點也不與 <math>F</math> 點重合</p> <p>(D)在 <math>\overline{FE}</math> 上，但不與 <math>F</math> 點也不與 <math>E</math> 點重合</p>	 <p>圖(十七)</p> <p>說明</p> <p>題目未提供直接可套用的幾何性質、定理或公式，需由學生建構或進行抽象的思考，編碼為 2。</p>

表 4

運算數量編碼示例

運 第 1 題

算 已知

數  $a = (-12) \times (-23) \times (-34) \times (-45)$ ，

量  $b = (-123) \times (-234) \times (-345)$ ，判斷

下列敘述何者正確？

(A)  $a$ 、 $b$  皆為正數

(B)  $a$ 、 $b$  皆為負數

(C)  $a$  為正數， $b$  為負數

(D)  $a$  為負數， $b$  為正數

說明

運算數量在 0~1 之間，編碼為 0

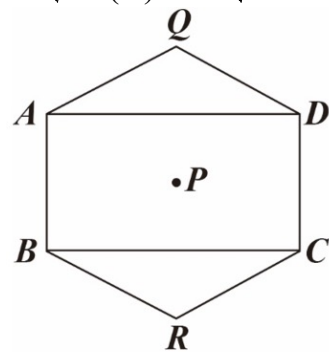
第 17 題

如圖(八)， $P$  點為矩形  $ABCD$  兩對角線的交點，將  $P$  點分別以  $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$  為對稱軸畫出對稱點  $Q$ 、 $R$ ，形成六邊形  $QABRCD$ 。若

$\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AD} = 4$ ，則六邊形  $QABRCD$  的周長為何？

(A) 12 (B)  $4 + 2\sqrt{6}$

(C)  $4 + 4\sqrt{3}$  (D)  $4 + 4\sqrt{5}$



圖(八)

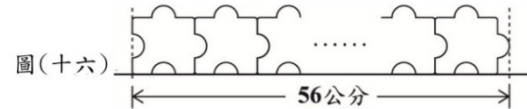
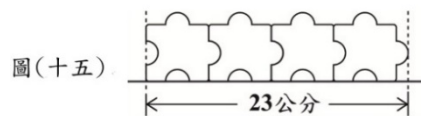
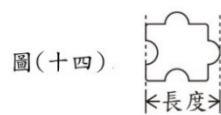
說明

運算數量在 2~3 之間，編碼為 1

第 23 題

已知有若干片相同的拼圖，其形狀如圖(十四)所示，且拼圖依同方向排列時可緊密拼成一列，此時底部可與直線貼齊。當 4 片拼圖緊密拼成一列時長度為 23 公分，如圖(十五)所示。當 10 片拼圖緊密拼成一列時長度為 56 公分，如圖(十六)所示。求圖(十四)中的拼圖長度為多少公分？

(A) 5.5 (B) 5.6 (C) 5.75 (D) 6.5



說明

運算數量在 4~5 之間，編碼為 2

表 5

表徵轉化編碼示例

表 第 7 題

徵 計算  $2x^2 - 3$  除以  $x + 1$  後，得商式  
轉 和餘式分別為何？

- (A) 商式為 2，餘式為 -5
- (B) 商式為  $2x - 5$ ，餘式為 5
- (C) 商式為  $2x + 2$ ，餘式為 -1
- (D) 商式為  $2x - 2$ ，餘式為 -1

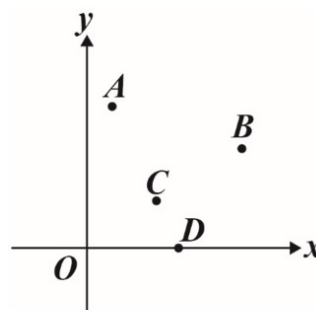
說明

題目不需使用圖形，編碼為 0

第 11 題

圖(三)的坐標平面上有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四點，其中恰有三點在函數  $y = px + q$  的圖形上，且  $p$ 、 $q$  為兩數。根據圖中四點的位置，判斷下列哪一點不在函數  $y = px + q$  的圖形上？

- (A)  $A$  (B)  $B$  (C)  $C$  (D)  $D$



圖(三)

說明

題目提供直接報讀的圖形，編碼為 1

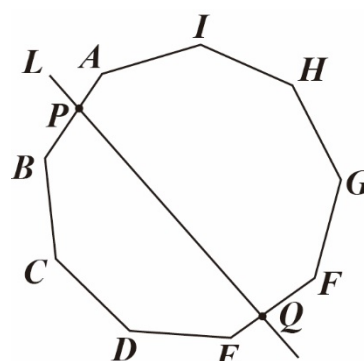
第 22 題

如圖(十三)，直線  $L$  將正九邊形  $ABCDEFGHI$  分割成兩個區域，且分別與  $\overline{AB}$ 、 $\overline{EF}$  相交於  $P$  點、 $Q$  點。若  $\angle APQ$  的外角為  $75^\circ$ ，則  $\angle PQE$  的度數為何？

- (A) 75 (B) 85 (C) 95 (D) 105

說明

題目提供直接報讀的圖形，但解題需自行處理，如圖形操作或解釋圖表，編碼為 2



圖(十三)

表 6

方程式資訊編碼示例

方 第 9 題

程 已知小薇住家的西方 100 公尺處為  
式 車站，住家的北方 200 公尺處為學  
資 校，且從學校往東方走 100 公尺，  
訊 再往南方走 400 公尺可到達公園。  
若小薇將住家、車站、學校分別標  
示在坐標平面上的  $(2,0)$ 、 $(0,0)$ 、

$(2,4)$  三點，則公園應標示在此坐

標平面上的哪一點？

(A)  $(4,-4)$  (B)  $(4,12)$

(C)  $(0,-4)$  (D)  $(0,12)$

說明

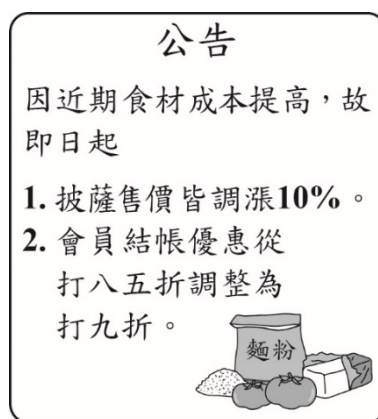
題目提供直接可套用的數學方程式、  
算式或不需使用方程式、算式，編碼  
為 0。

第 14 題

圖(六)為朵朵披薩屋的公告。若一個  
夏威夷披薩調漲前的售價為  $x$  元，則  
會員購買一個夏威夷披薩的花費，公  
告前後相差多少元？

(A)  $0.05x$  (B)  $0.09x$

(C)  $0.14x$  (D)  $0.15x$



圖(六)

說明

依據題目提供的文字描述可列出方程  
式、算式，編碼為 1。

第 25 題

圖(十八)為有春蛋糕店的價目表，  
阿凱原本拿了 4 個蛋糕去結帳，結  
帳時發現該店正在舉辦優惠活動，  
優惠方式為每買 5 個蛋糕，其中 1  
個價格最低的蛋糕免費，因此阿凱  
後來多買了 1 個黑櫻桃蛋糕。若阿  
凱原本的結帳金額為  $x$  元，後來的  
結帳金額為  $y$  元，則  $x$  與  $y$  的關係

式不可能為下列何者？

(A)  $y = x$  (B)  $y = x + 5$

(C)  $y = x + 10$  (D)  $y = x + 15$

說明

題目未提供方程式、算式，須由學生  
自行建構，編碼為 2。

蛋糕種類	伯爵茶蛋糕	鮮奶捲蛋糕	濃起司蛋糕	黑櫻桃蛋糕	水果派蛋糕	千層派蛋糕	
	40 元	45 元	45 元	55 元	60 元	70 元	

圖(十八)

表 7

情境新穎編碼示例

情 第 3 題

境 小真煮好了 25 顆湯圓，其中 15 顆為  
新 芝麻湯圓，10 顆為花生湯圓。已知  
穎 小真想從煮好的湯圓中撈一顆，若每  
顆湯圓被小真撈到的機會相等，則他  
撈到花生湯圓的機率為何？

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{2}{5}$  (D)  $\frac{1}{10}$

說明

該領域內容常見於課本、習作的題型，  
編碼為 0。

第 12 題

圖(四)表示平面上  $A$ 、 $B$  兩點與直線  $L$  的  
位置關係，其中  $B$  點在  $L$  上。若有一動  
點  $P$  從  $A$  點開始移動，移動過程中與  $B$   
點的距離保持不變，則下列關於  $P$  點移  
動路徑的敘述，何者正確？

- (A) 在與直線  $L$  平行且通過  $A$  點的直線上  
(B) 在與直線  $L$  垂直且通過  $A$  點的直線上  
(C) 在以  $B$  點為圓心且通過  $A$  點的圓上  
(D) 在以  $\overline{AB}$  為直徑的圓上

•  $A$



說明

該領域內容較不常見於課本、習作的  
題型，編碼為 1。

第 18 題

圖(九)為小麗和小歐依序進入電梯  
時，電梯因超重而警示音響起的過  
程，且過程中沒有其他人進出。



已知當電梯乘載的重量超過 300 公  
斤時警示音會響起，且小麗、小歐  
的重量分別為 50 公斤、70 公斤。  
若小麗進入電梯前，電梯內已乘載  
的重量為  $x$  公斤，則所有滿足題意  
的  $x$  可用下列哪一個不等式表示？

- (A)  $180 < x \leq 250$  (B)  $180 < x \leq 300$   
(C)  $230 < x \leq 250$  (D)  $230 < x \leq 300$

說明

該領域內容罕見於課本、習作的題  
型，編碼為 2。



## 六、資料分析

本研究進行下列資料分析：

1. 以 Pearson 積差相關分析試題難度參數  $p$  與認知成分之間的相關。
2. 以多元迴歸分析，檢視認知成分編碼模式對試題難度參數變異的解釋力。

## 肆、分析結果與討論

### 一、試題認知成份編碼一致性及對試題難度之相關

本研究認知試題難度以全體受試者答對或通過該題的百分比表示。這個百分比即稱為難度參數，其計算公式為： $P=R/N$ 。P 代表题目的難度指數，R 為答對該試題的人數，N 為全體受試者的人數。表 8 為試題認知成份編碼與試題難度參數描述統計摘要表。

表8

試題認知成份編碼描述統計摘要表

認知成分	解題步驟數	運算數量	表徵轉化	方程式資訊	情境新穎
平均數	1.19	1.08	1.08	.81	.81
標準差	.694	.796	.845	.801	.849

本次研究始於國立臺南大學林素微教授開課之《認知心理學與教育測驗》課堂上之討論，作者就認知負荷觀點來探討對 109 年國中數學科會考試題難度之影響，由組內成員先各自對解題步驟數、運算數量、表徵轉化、方程式資訊和情境新穎等五個認知成份進行編碼後，再進行整體的討論，結果發現在認知成份編碼上有些許的差異，因此我們認為應先針對認知成份編碼的一致性進行探究，以釐清組員不同的編碼在編碼一致上對研究產生何種影響。

表 9

## 編碼者認知成分編碼一致性 (題數= 26)

		乙	丙	丁
表徵轉化	甲	.704**	.884**	.714**
	乙		.824**	.654**
	丙			.826**
方程式資訊	甲	.582**	.764**	.766**
	乙		.818**	.762**
	丙			.941**
情境新穎	甲	.542**	.697**	.641**
	乙		.709**	.764**
	丙			.940**

\*\*p &lt; .01

表 9 為高中校長甲 (數學科, 教學年資 28 年)、國中校長乙 (數學科, 教學年資 29 年)、教師丙 (國小衛生組長, 教學年資 7 年)、教師丁 (國中健康科、數學科教師, 教學年資 16 年) 在試題認知成分「表徵轉化」、「方程式資訊」、「情境新穎」三個項目的編碼一致性係數。由編碼者一致性的 kappa 係數可見兩兩間多數顯示高度正相關。由編碼者一致性的 kappa 係數顯示中等強度以上正相關, 對試題的認知成份編碼均有支持。唯「解題步驟數」與「運算數量」兩認知項目的編碼, 已在國立臺南大學林素微教授開課之《認知心理學與教育測驗》課堂上, 由教授帶領 9 位修課之碩博士生共同討論得出之編碼, 故在此無另外再次編碼。

本研究採用 Cohen's kappa 係數分析四位編碼者對 26 題試題之認知成分編碼的一致性。結果顯示, 在「表徵轉化」方面, 四位編碼者 kappa 係數值至少達到 0.654 以上, 顯示一致性強度達到「較強」以上的程度。在「方程式資訊」部分, 唯甲 vs. 乙的 kappa 係數為 0.582 顯示一致性強度達到「中等」程度, 但其他 kappa 係數值皆有達到 0.762 以上, 顯示一致性強度亦有達到「較強」以上程度。而在「情境新穎」方面, 除了甲 vs. 乙的 kappa 係數為 0.542 顯示一致性強度達到「中等」程度, 其餘 kappa 係數值皆有達到 0.641 以上, 顯示一致性強度亦有達到「較強」以上程度。總而言之, 在編碼一致性部分, kappa 係數具有中等強度一致性,  $P < 0.001$ 。

表 10 呈現試題難度參數與認知成分的相關。整體而言，試題難度與各認知成分間均呈現負相關，負值即表示兩個變項間具有逆向變化的關聯性，即認知成分越高、難度參數(答對比率)越低。除了運算數量之外，解題步驟數、表徵轉化、方程式資訊與情境新穎等四個成分與難度參數間均存在相當高的負相關，其中以情境新穎和試題難度參數的負相關最高，亦即情境越新穎，試題難度越強，大約有 83%的難度預測力，可解釋大部份試題難度參數的變異。

此外，在成分間的相關部分，解題步驟數與表徵轉化相關為 0.656，可能造成在對試題難度解釋的過程中，解題步驟數會被表徵轉化解釋。表徵轉化與情境新穎之間相關為 0.802，方程式資訊與情境新穎之間相關為 0.531。此外，運算數量與試題難度及各認知成分間相關程度未達顯著，表示運算數量與試題難度參數的變異程度不高，與各認知成分間的相關程度不高。

表 10  
試題難度與各認知成分相關矩陣 (題數= 26)

	解題步驟數	運算數量	表徵轉化	方程式資訊	情境新穎
試題難度 p	-.584**	-.056	-.759**	-.700**	-.836**
解題步驟數		-.173	.656**	.429*	.608**
運算數量			-.188	.150	-.273
表徵轉化				.555**	.802**
方程式資訊					.531**

\*\*相關性在0.01層級上顯著 (雙尾)。

\*相關性在0.05層級上顯著 (雙尾)。

## 二、 試題認知成份對難度的預測力

在針對試題難度值進行多元逐步迴歸分析結果呈現於表11及表12，結果顯示情境新穎、方程式資訊和運算數量三個成分與試題難度參數的相關達0.911，可共同解釋難度的變異達82.9%。然而，認知成分「解題步驟數」、「表徵轉化」卻未能如預期進入迴歸預測模式，無法有效的解釋試題難度，其中「表徵轉化」與「情境新穎」高度相關造成共線性，於是刪除該變項。對難度係數預測力的係數，情境新穎為-0.153、方程式資訊為-0.057、運算數量為-0.048。相對應的標準化係數分別為-0.755、-0.266、-0.222。其中情

境新穎的標準化迴歸係數絕對值最大，可見情境新穎每增加1單位，對於試題難度值將減少0.755個單位。

表11

認知成分對109國中數學科會考試題參數逐步多元迴歸模型摘要(題數=26)

模型	R	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> 變更	F值變更	顯著性F值變更
1	.836 <sup>a</sup>	.698	.698	55.536	.000
2	.889 <sup>b</sup>	.790	.092	10.032	.004
3	.911 <sup>c</sup>	.829	.040	5.108	.034

a. 解釋變數：(常數)，情境新穎

b. 解釋變數：(常數)，情境新穎，方程式資訊

c. 解釋變數：(常數)，情境新穎，方程式資訊，運算數量

本研究依據所選定的認知成分對109年教育會考之數學科試題難度的解釋力達到82.9%，但「解題步驟數」、「表徵轉化」尚未能提供有效、獨立的試題難度解釋力。檢視試題「表徵轉化」成分編碼操作性定義，發現本研究中大部分試題的「表徵轉化」與「情境新穎」的重疊過高。後續修訂須進一步檢視「表徵轉化」之操作性定義，讓「表徵轉化」與「情境新穎」有獨立性。

表12

認知成分對109國中數學科會考試題難度參數多元迴歸預測分析摘要(題數=26)

變異數分析<sup>a</sup>

模型	平方和	自由度	均方	F	顯著性	
1	迴歸	.515	1	.515	55.536	.000 <sup>b</sup>
	殘差	.223	24	.009		
	總計	.738	25			
2	迴歸	.583	2	.291	43.235	.000 <sup>c</sup>
	殘差	.155	23	.007		
	總計	.738	25			
3	迴歸	.612	3	.204	35.673	.000 <sup>d</sup>
	殘差	.126	22	.006		
	總計	.738	25			

a. 應變數：試題難度

b. 解釋變數：(常數)，情境新穎

c. 解釋變數：(常數)，情境新穎，方程式資訊

d. 解釋變數：(常數)，情境新穎，方程式資訊，運算數量

係數(應變數: 試題難度)

模型	非標準化係數		標準化係數	T	顯著性	
	B	標準誤差	$\beta$			
1	(常數)	.731	.026	27.790	.000	
	情境新穎	-.169	.023	-.836	-.7452	.000
2	(常數)	.762	.024	31.162	.000	
	情境新穎	-.131	.023	-.646	-5.723	.000
	方程式資訊	-.077	.024	-.357	-3.167	.004
3	(常數)	.816	.033	24.944	.000	
	情境新穎	-.153	.023	-.755	-6.587	.000
	方程式資訊	-.057	.024	-.266	-2.389	.026
	運算數量	-.048	.021	-.222	-2.260	.034

## 伍、結論與建議

本研究旨在透過探究文獻對認知負荷觀點的結果對 109 國中數學科會考試題提出五項認知成分，分別為解題步驟數、運算數量、表徵轉化、方程式資訊與情境新穎，以認知成分分析進行試題難度參數估計。透過難度參數多元迴歸分析結果發現，情境新穎、方程式資訊和運算數量三項認知成分可共同解釋試題難度參數的變異達 82.9%，其標準化迴歸係數分別為-0.755、-0.266、-0.222，由此可知情境新穎每增加 1 單位，對於試題難度參數將減少 0.755 個單位左右；每增加方程式資訊認知成分一個單位，對試題難度參數將減少 0.266 個單位左右；每增加運算數量認知成分一個單位，對試題難度參數將減少 0.222 個單位左右。然而，「解題步驟數」、「表徵轉化」未能提供有效、獨立的試題難度解釋力，宜進一步檢視修訂其之操作性定義。

在此三個認知成分中，又以情境新穎的迴歸係數最大，顯見 109 國中數學科會考測驗中，情境新穎明顯決定試題難度參數的大小。情境新穎認知成分在迴歸預測分析中對試題難度的標準化係數達-0.755，更顯示情境新穎認知成分是判斷學生會考答題狀況與國中三年提升學習成效的重要成分。本研究提出的情境新穎認知成分定義主要界定為「題目所涉及之熟悉度」，也就是該領域內容是否為常見於課本、習作的題型。顯示學生是否有能力認知「解決在實際生活中不太會遇到的試題或情境」，將影響其通過試題能

力甚鉅。綜合以上分析，若教師在教材準備與提升學生學習部分，可特別針對不常見於課本、習作的非例行性題型進行整理，對於提升學生面對非常見題型的能力將有助益。

本研究依據相關文獻所提出認知成分操作定義，初步研究結果能合理呈現認知成分與試題難度參數變異程度，情境新穎、方程式資訊和運算數量三項認知成分達到解釋力將近 83%，顯示認知成分分析有利試題主要難度變異來源的掌握與操作。後續研究將進一步改善解題步驟數與表徵轉化認知成分的調整，以更具代表性的認知成分進行試題難度參數資料蒐集，交叉檢核模式的實用性。本研究模式以 109 國中數學科會考試題內容和認知分析實徵文獻統整而成，模式中所得之認知成分（如情境新穎、方程式資訊和運算數量與解釋力的同時斟酌）可提供國民中學教師未來進行數學教學方向與學生學習提升的實徵參考。

## 參考文獻

- 洪碧霞、林素微、林娟如(2006)。認知複雜分析架構對 TASA-MAT 六年級線上測驗試題難度的解釋力。《教育研究與發展期刊》，2(4)69-86。
- 洪碧霞、蕭嘉偉、林素微(2009)。PISA 數學素養認知成份分析對補救教學的意涵。《課程與教學季刊》，13(1)，47-66。
- 蘇義翔、洪碧霞(2015)。基於認知成份之代數推理測驗自動化命題模式之發展。《人文社會學報》，11(2)，133-162。
- American Association for the Advancement of Science. (1990). *Project 2061: Science for all Americans*. New York: Oxford University Press.
- Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z. & Zimmer, J. M. (1999). Cross-national comparison of representational competence, *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 541-547.
- Cramer K. A., Post T. R. & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum, *Journal for Research in Mathematics*

- Education*, 33(2), 111-144.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1996). On different facts of mathematical thinking, in : R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*, Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Embretson, S. E. & Gorin J. (2001). Improving construct validity with cognitive psychology principle. *Journal of Educational Measurement*, 38, 343-368.
- Embretson, S. E., & Daniel, R. C. (2008). Understanding and quantifying cognitive complexity level in mathematical problem solving items. *Psychology Science Quarterly*, 50(3), 328-344.
- Embretson, S. E. (2007). Construct Validity: A Universal Validity System or Just Another Test Evaluation Procedure? *Educational Researcher*, 36 (8), pp. 449-455.
- Holling, H., Blank, H., Kuchenbacker, K., & Kuhn, J. (2008). Rule-based item design of statistical word problems: A review and first implementation. *Psychology Science Quarterly*, 50(3), 363-378.
- Lesh. R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representation and translation among Representation in mathematics learning and problem solving, in C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in teaching and learning of mathematics*, NJ: Erlbaum.
- McNamara, T. (2000). *Language testing*. New York: Oxford University Press.
- Riley, M. S. & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5(1), 49-101.
- Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, 12, 257-285.
- Sweller, J.(1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, 26, 113-125.
- Sweller, J., & Van Merriënboer, J. J. G., & Pass, F. G. W. C. (1988). *Cognitive architecture and instruction*, 12(3), 185-233.

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, 22, 123-138.