

台南市立忠孝國中九十七學年度第二學期一年級數理資優課程

講義

◆ 遊戲中學數學

Fun1 大風吹

---請聽老師的口令，進行動作。

Fun2 數獨

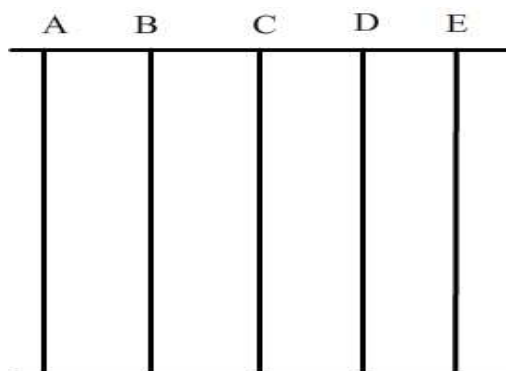
	2		
3		1	
			4

			4
	1		
		4	3

8	4				6			2
					2	8		1
	1			8				
4	3			5				
		2	8		4	7		
				7			9	4
				9			4	
1		4	7					
7			3				6	5

Fun3 畫鬼腳

請在 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ 中，任意畫上 3, 4, 2, 3 條橫線，看誰得獎了?!



台南市立忠孝國中九十七學年度第二學期一年級數理資優課程

講義

◆ 什麼是函數

【口語來說】

函數是 A.一種合理遊戲規則，如籃球、棒球比賽規則等等，參賽者要遵守。

B.不合理的遊戲規則，無法勉強進行。

【數學術語】

函數是一種對應關係 → 所以函數不是「數」。

而對應關係有哪些情況呢？回憶一下大風吹的例子：

一個人一定會有一個位子可以坐。 - - - - >

兩個人（或以上）。可以坐同一張椅子。 - - - - >

但是：「一個不可能坐兩張或以上的椅子，對不對？」 - - >

◆ 生活中函數的例子



叫作



叫作

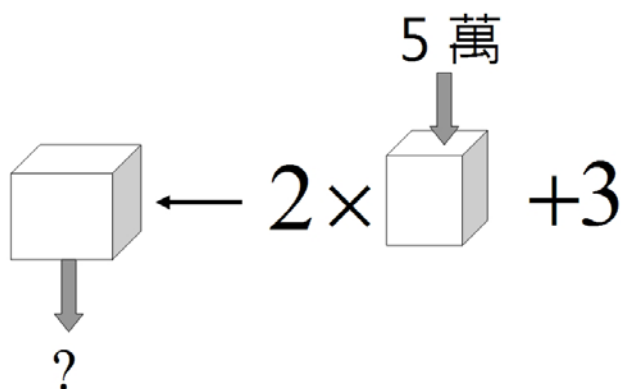


叫作

講義

◆ 函數的分類

神奇提款機：有一部神奇提款機，存進 5 萬元，可以領出 13 萬，請問存入 12 萬可以領出多少錢？



如果提款金額設為 y 元，存款金額設為 x 元，請問這臺提款機的存款與提款金額之間，有什麼特殊的關係呢？答：

■ 解惑篇：

疑惑 1 函數是什麼意思呢？

疑惑 2 那一種情形不叫函數？

疑惑 3 函數是不是數？

疑惑 4 有時候題目是函數，有時候又不是，如何區分？

台南市立忠孝國中九十七學年度第二學期一年級數理資優課程

講義

觀念掃描：

1.函數意義：函數是指兩個數量之間，它們所產生的對應關係，其中先改變的量，我們稱之為「自變數(或自變量)，通常以 x 表示」，因應「自變數」的改變，依循既定規則而改變的量，稱之為「應變數(或應變量)，通常以 y 表示」，因此函數可寫成一種關係式。

2.函數寫法：若 y 是 x 的函數，我們以 $y = f(x)$ 表示之。

◆觀念：

(1)函數是一種對應關係。

(2)函數的對應關係只有兩種，「一對一」與「多對一」；而「一對多」不是函數關係。

為什麼「一對多」不是函數關係？如果某一場棒球賽它的賣票規定很奇特，對於 110 公分的觀眾一下子說是「免票」，過一陣子又變成「半票」，最後還會隨心情的起伏，賣給他「全票」，身高 110 公分(叫作「一」)對應到多種的票價(叫作「多」)，如果小讀者遇到這種無厘頭的販賣方式，不氣瘋了才怪，太不合理了。

3.函數種類

以 y 是 x 的函數來說，由於 y 是隨著 x 而改變，以 x 的次方來決定， y 是一個什麼樣的函數。

(1)當 x 是 0 次方 (x 為常數時)，稱為常數函數，也叫作零次函數，如 $y = 2$, $y = -4$ 都是。

(2)當 x 是 1 次方，稱為一次函數，也叫作線型函數，如 $y = 3x$, $y = -4x$, $y = 0.5x$ 都是。

(3)當 x 是 2 次方，稱為二次函數，如 $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = -6x^2$ 都是。

(4)當 x 是 3 次方或以上，依此類推。

◆觀念：習慣上，數目字 0(零)不叫作零次函數，而是稱為「零函數」。

4.函數值：不管是幾次函數或不同寫法的函數，函數值的計算方式都相同，也就是將 x 的值代入式子中，求出 y 之值，換言之，當 $x = a$ 時，所對應到的 y 值，叫函數值，以 $y = f(a)$ 表示。

例如 $y = 3x$ ，當 $x = 1$ 時之函數值=? $y = 3 \times 1 = 3$, $f(1) = 3$

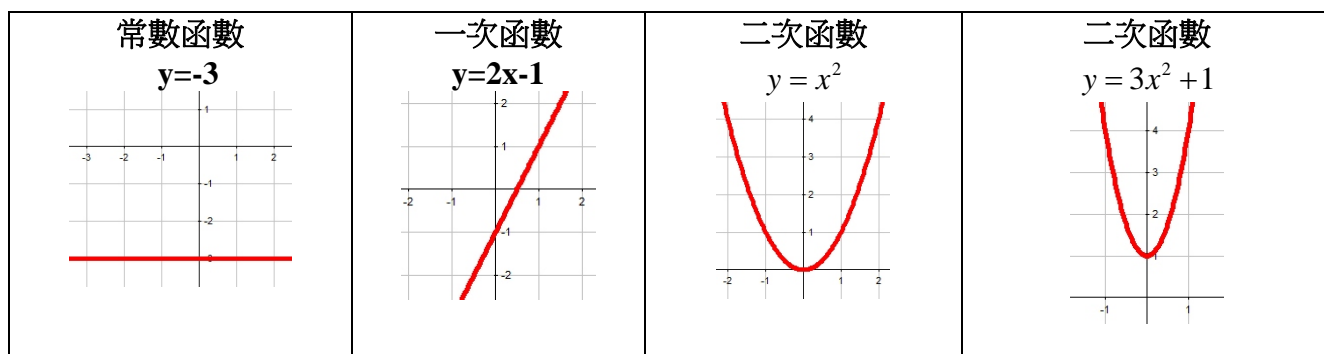
$y = 2x^2$ ，當 $x = 5$ 時之函數值=? $y = 2 \times 5 \times 5 = 50$, $f(5) = 50$

台南市立忠孝國中九十七學年度第二學期一年級數理資優課程

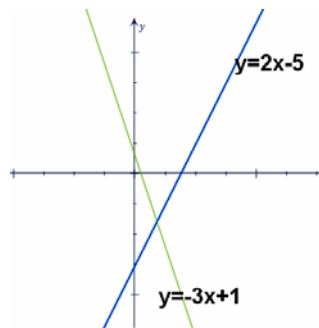
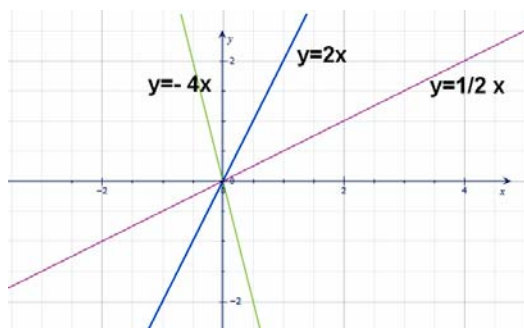
講義

5.函數圖形

- (1)在坐標平面上，由函數 $y = f(x)$ 的所有點 (x, y) 描繪而成的圖形，叫函數圖形。
- (2)函數圖形隨著 x 的次方而有不同，畫起來的圖形若是一條直線，我們稱之為線型函數，由下圖可知，常數函數與一次函數都是線型函數。

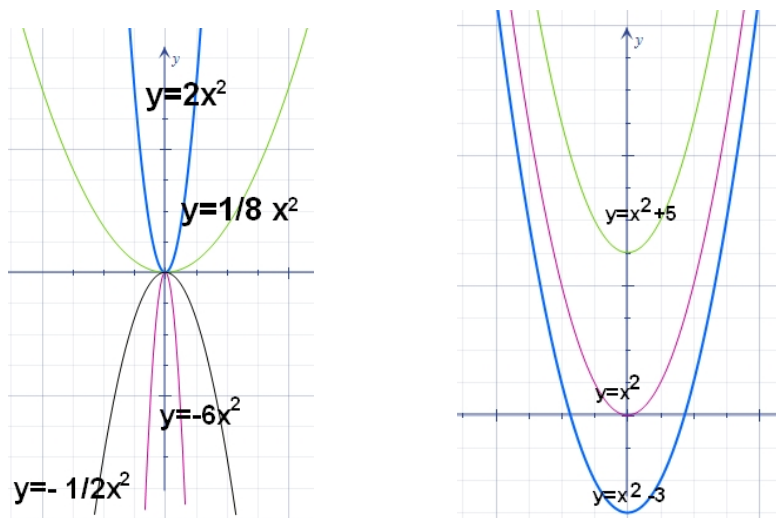


- (3)函數圖形與它們的關係式有密切關係，請觀察以下圖形：



- A.沒有常數項時，都會通過原點。
- B. x 項之前的數字(叫係數)，似乎與方向有關，正數時直線方向朝右上方，負數朝左上方。
- C.有常數項時，這個常數項代表此直線與 y 軸的交點位置(稱為截距)

講義



A.二次函數的圖形稱之為「拋物線」。

B.若以 $y = ax^2$ 來說明(左圖)，

$a > 0$ ，拋物線開口向上，數字愈大，開口愈小，數字愈小，開口愈大。

$a < 0$ ，拋物線開口向下，若不管正負，數字愈大，開口愈小，數字愈小，開口愈大。

換句話說， a 的正負號決定拋物線開口的上下，而 a 絕對值的大小則決定了開口的大小， $|a|$ 愈大，則拋物線的開口愈小，反之，開口則愈大。

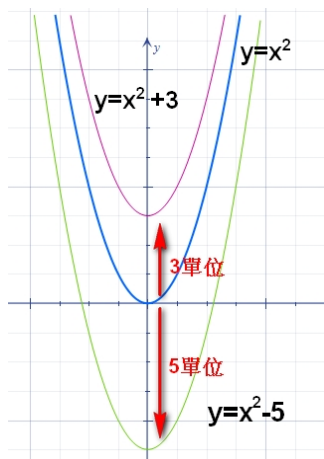
C.若以 $y = ax^2 + b$ 來觀察(右圖)，

$b > 0$ 與 y 軸的交點在 x 軸的上方 b 格

$b < 0$ 與 y 軸的交點在 x 軸的下方 b 格

D.換個角度，我們也可說， $y = ax^2 + b$ 的圖形是把 $y = ax^2$ 的圖形在 y 軸上下移動 b 格，這個結論，我們稱之為圖形的「平移」。

【小結論】



← 在 y 軸方向的平移

台南市立忠孝國中九十七學年度第二學期一年級數理資優課程

講義

一・選擇題 (每題 6 分, 共 36 分)

- () 1. 已知函數 $f(x) = -2x + 1$, 則下列函數值何者最小?
(A) $f(-5)$ (B) $f(-1)$ (C) $f(0)$ (D) $f(2)$
- () 2. 已知函數 $f(x) = 3(x-5) + 4$, 則下列函數值何者錯誤?
(A) $f(-2) = -17$ (B) $f(-1) = -14$
(C) $f(1) = -12$ (D) $f(4) = 1$
- () 3. 設函數 $f(x) = \frac{4}{7}$, 且 a, b, c 為相異的整數, 則下列函數值何者最大?
(A) $f(a-b) + f(c)$ (B) $f(a) - f(b+c)$
(C) $f(a-b+c)$ (D) $f(a) - f(b) + f(c)$
- () 4. 若函數 $f(x) = 3x^2 - ax + 1$, 且 $f(-2) = f(1)$, 則 $a = ?$
(A) 2 (B) -3 (C) -1 (D) 4
- () 5. 對於任一正整數 x , 若以 $f(x)$ 表示 x 的正因數個數, 則 $f(18) = ?$
(A) 18 (B) 6 (C) 2 (D) 1
- () 6. 若 $f(x) = 3^x$, 則 $f(x+1) - f(x) = ?$
(A) 3 (B) $f(x)$ (C) $2f(x)$ (D) $3f(x)$

二・填充題 (每格 5 分, 共 30 分)

1. 設函數 $f(x) = 3x + 2$, 則
(1) $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(2) 若 $f(a) = a$, 則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 設函數 $g(x) = 3x + 8$ 在 $x = a$ 的函數值是 14, 在 $x = b$ 的函數值是 2,
則 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 若函數 $f(x) = 24x + a$ 與 $g(x) = 5(3x - 1) + 7$, 在 $x = -\frac{1}{3}$ 時的函數值相等, 則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 設函數 $f(x) = 2x + 3$, 則 $f(n+3) - f(n-3) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 已知函數 $f(x) = -1234x + 56789$, 求 $\frac{f(219) - f(40)}{219 - 40}$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三·計算題(共34分)

1. 設 $f\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = x^2 - 3x + 2$ ，請求出 $f(5)$ 之值為多少？(10分)

解

2. 設 $f(x) = x^2 + ax - b$ ，若 $3f(2) - 4f(1) = 7$ ， $f(3) = 5$ ，請問 a 、 b 之值各為多少？(10分)

解

3. 設函數 $f(x) = 3(x-5)$ ， $g(x-2) = 2x+5$ ，試求：

(1) $g(3) = ?$ (7分)

(2) $g(f(3)) = ?$ (7分)

解

台南市立忠孝國中九十七學年度第二學期一年級數理資優課程

講義

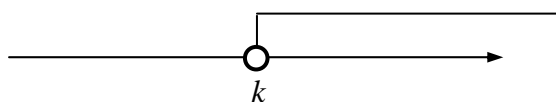
◆ 一次不等式

1. 三一律：任意兩數 a 、 b 間的大小關係有 $a > b$ ， $a = b$ ， $a < b$ 三種情形，其中只有一種會成立，這個性質稱為三一律。
2. 遞移律：有 a 、 b 、 c 三數，若 $a > b$ 且 $b > c$ ，則 $a > c$ ；
若 $a < b$ 且 $b < c$ ，則 $a < c$ 。
3. 不等號與不等式：在數學的符號中，「 $>$ 、 $<$ 、 \geq 、 \leq 」與「 \neq 」稱為不等號，包含以上符號的數學式子稱為不等式。
注意：為求方便，通常會將兩個相關且同時成立的不等式合併在一起，例如 $x < 37$ 且 $x \geq 28$ 可記為 $28 \leq x < 37$ 。

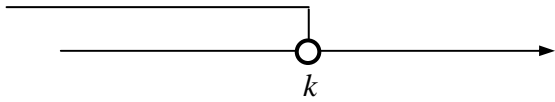
4. 不等號的讀法與同義詞：

符號	讀法	同義詞舉例
$>$	大於	超過，高於
$<$	小於	不足，不滿，不到，低於
\geq	大於或等於	不小於，不低於，足夠用，以上（含）
\leq	小於或等於	不大於，不超過，不高於，以下（含）
\neq	不等於	不相等，相異，非

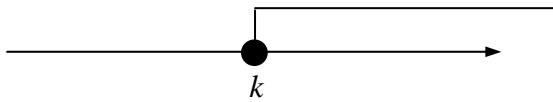
5. 一元一次不等式：只含有一種未知數，且次方為一次的不等式，稱為一元一次不等式。
6. 一元一次不等式的解：如果將一個已知數代入一元一次不等式中的未知數，而不等式仍然成立，則此已知數稱為該一元一次不等式的一個解。
7. 類似等量公理的不等式性質：
 - (1) 兩邊同加（減）一數，不等號方向不變。
例如 $a > b$ ， c 為任意數，則 $a + c > b + c$ 且 $a - c > b - c$
 - (2) 兩邊同乘（除）一正數，不等號方向不變。
例如 $a > b$ ， $c > 0$ ，則 $axc > bxc$ 且 $a \div c > b \div c$
 - (3) 兩邊同乘（除）一負數，不等號方向要改變。
例如 $a > b$ ， $c < 0$ ，則 $axc < bxc$ 且 $a \div c < b \div c$
8. 一元一次不等式解的形式與圖示：
 - (1) $x > k$ 表示所有比 k 大的數都是不等式的解，圖示如下：



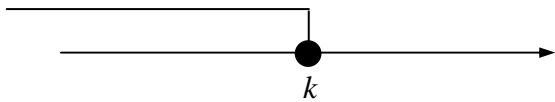
(2) $x < k$ 表示所有比 k 小的數都是不等式的解，圖示如下：



(3) $x \geq k$ 表示包含 k 和比 k 大的數都是不等式的解，圖示如下：



(4) $x \leq k$ 表示包含 k 和比 k 小的數都是不等式的解，圖示如下：



在不等式的圖形中，將包含的端點，以實心的「●」表示；將不包含的端點，以空心的「○」表示。而向左的圖示通常不加箭號。

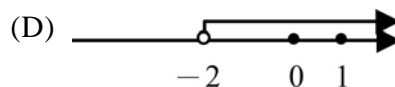
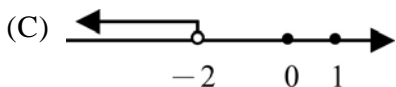
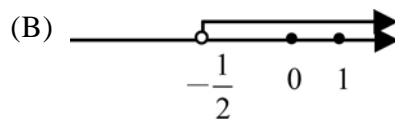
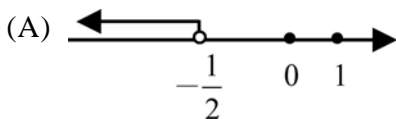
注意 ① 通常會將兩個相關不等式解的圖示合併在一起，
例如 $x < 5$ 且 $x \geq 2$ 可記為 $2 \leq x < 5$ ，圖示如下：



② 「端點」亦稱為「邊界點」。

一、選擇題

- () 1. 翰翰到文具行買每支 5 元的鉛筆 6 枝，每支 10 元的原子筆 x 枝，每本 15 元的筆記簿 $3x$ 本，若翰翰共帶了 200 元，結帳時發現不夠。上述不等關係可以用哪一個不等式表示？(A) $30 + 55x < 200$ (B) $30 + 55x \leq 200$ (C) $30 + 55x > 200$ (D) $30 + 55x \geq 200$
- () 2. 下列哪一個數滿足不等式 $5x - 3(x - 2) \leq 14$ ？
(A) 4 (B) $4\frac{1}{3}$ (C) 10 (D) 12。
- () 3. 數字 -3 可以滿足下列哪一個不等式？
(A) $x + 5 \leq 0$ (B) $x - 2 > 0$ (C) $2x + 1 < -5$ (D) $x + 4 \geq 1$ 。
- () 4. 下列敘述何者正確？
(A) 若 $3(x - 2) > 10$ ，則 $x > \frac{10}{3}$ (B) 若 $3(x - 2) > 10$ ，則 $x > \frac{3}{10}$
(C) 若 $-\frac{1}{3}(x + 2) > 5$ ，則 $x + 2 < -15$ (D) 若 $-\frac{1}{3}(x + 2) > 5$ ，則 $x + 2 > -15$ 。
- () 5. 下列哪一個圖形為不等式 $-3x + 1 > 3 + x$ 解的圖示？



講義

5-1 不等式練習試題

一・選擇題

() 1. 若 $a > b$ ，且 c 為任意數，則(甲)~(戊)的敘述中，正確的有幾個？

(甲) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (乙) $a^3 > b^3$ (丙) $a^2 > b^2$ (丁) $ac^2 > bc^2$ (戊) $|a| > |b|$

(A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個

() 2. 下列哪一個不等式中， $x=4$ 不是其解？

(A) $\frac{3}{4}x - 6 < 0$ (B) $\frac{5x-6}{2} > 8$ (C) $5x > 3x - 40$ (D) $2x - 1 > 0$

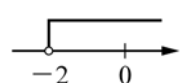
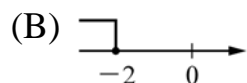
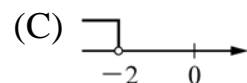
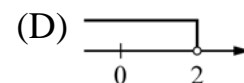
() 3. 若 a 、 b 、 c 都是負數，且 $a < b$ ，則下列選項何者錯誤？

(A) $ab > b^2$ (B) $c - a > c - b$ (C) $1 < \frac{b-a}{a}$ (D) $\frac{a-b}{c} > 0$

() 4. 不等式 $\frac{2}{3}x + 1 \leq \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ ，則 $|-2x|$ 之值不可能為何？

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

() 5. 下列何者為不等式 $-5x - 8 > 2x + 6$ 的圖解？

(A)  (B)  (C)  (D) 

() 6. 浩浩今年的身高比去年高 6 公分，但今年的身高仍不到 170 公分，則浩浩去年身高的範圍為何？

(A) 超過 164 公分 (B) 高於 170 公分
(C) 不高於 164 公分 (D) 低於 164 公分

二・填充題

1. 解不等式 $x + 7 > 3x - 5$ ，得解為_____。

2. 解不等式 $-2(2x + 1) \leq -(5x + 6)$ ，得解為_____。

3. 解不等式 $\frac{2(x+3)-1}{3} \geq \frac{3(x-4)+2}{2}$ ，得解為_____。

4. 不等式 $ax+5 < 2x+7$ 的解為 $x > -\frac{1}{3}$ ，則 $a =$ _____。
5. 若 x 是正整數，則滿足不等式 $2x-12 < -x$ 的解有 _____ 個。
6. 小勇與媽媽上市場買了 100 元的魚與每公斤 100 元的蝦子 x 公斤，且所花的錢不超過 300 元，則依題意可列出不等式為 _____。(不必化簡)

三·計算題

1. 解下列各不等式：

$$(1) \frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} \leq \frac{2x}{3} - \frac{2x+3}{6}$$

$$(2) \frac{3x-5}{2} + 1 \leq \frac{2x-3}{3} + 2$$

2. 解下列各不等式，並在數線上圖示其解：

$$(1) \frac{3}{2}x + 5 < 8$$

$$(2) -2(x-3) \leq 2(x-3)$$

$$(3) 1 - \frac{3x+4}{2} < \frac{x+2}{3} + 2$$