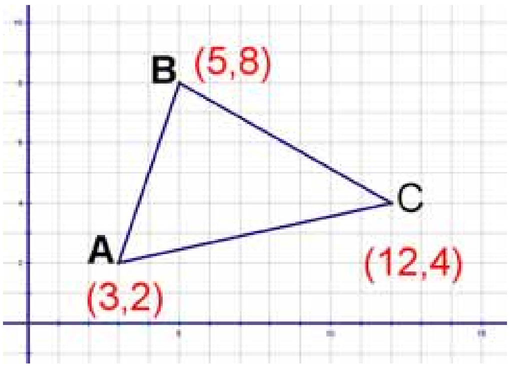
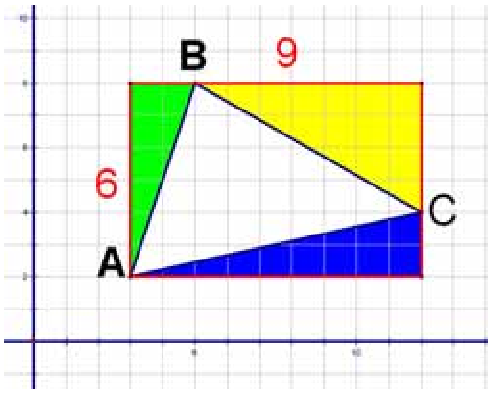
給我一個面積公式吧~

在上課的時候面積問題總是可以引起許多的討論，尤其在國中階段可以用的「招數」不多，但是這絲毫不會影響學生解題的慾望。

我們希望算出在一個在直角座標平面上的三角形面積(如圖一)，同學吱吱喳喳的計算著，大部份同學都使出拿手的絕活，將圖形重新作處理----變成一個長方形，然後利用長方形面積減去四個角落的三角形面積。



圖一



圖二

△ABC=長方形面積－綠色△面積－藍色△面積－黃色△面積

$=6\times 9-\frac{1}{2}\times 2\times 6-\frac{1}{2}\times 9\times 2-\frac{1}{2}\times 7\times 4$

＝54-6-9-14

＝25(平方單位)

除了圖二的處理方式外，有沒有其他的作法呢？有一些學生自然就會發現：其實不一定要補成長方形，變成梯形(如圖三)也可以嘛，所以解決的方式也是類似的，同學就可以很快地算出：△ABC 的仍然是 25 平方單

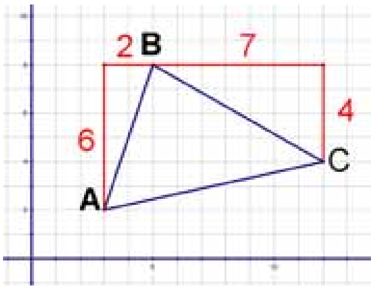
位。

△ABC=梯形面積－左△面積－右△面積

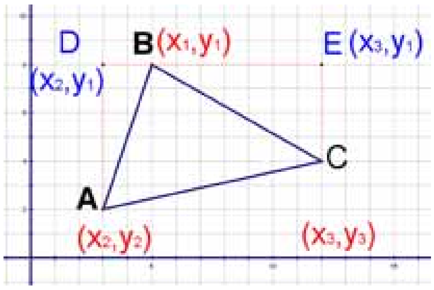
$$=\frac{1}{2}(4+6)\times 9-\frac{1}{2}\times 2\times 6-\frac{1}{2}\times 7\times 4$$

＝45-6-14

＝25(平方單位)



圖三



圖四

看著同學的興緻正高昂，俗話說打鐵要趁熱，所以我也就繼續推廣下去嘍，如果圖形是如圖四時，有誰會算出面積啊？！

可以想像的大部份國中生一定會大叫：「太難了、不會作…」等等，不過等到他靜下心就會發現，圖四的題目和圖三其實是一樣的嘛，只不過一題是數字，一題用文字表示，硬著頭皮試試看…

△ABC=梯形面積－左△面積－右△面積

$$=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{CE})\times\overline{DE}-\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BD}-\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{CE}$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1-y_2)+(y_1-y_3)]\times(x_3-x_2)-\frac{1}{2}\times(y_1-y_2)\times(x_1-x_2)$$

$$-\frac{1}{2}\times(x_3-x_1)\times(y_1-y_3)$$

$$=\frac{1}{2}[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)] \qquad *$$

這個好結論，如果借用類似行列式的寫法的話，那就更漂亮了…

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$ 其中↘乘爲正，↙乘爲負

果然是「不禁一番寒澈骨，那得梅花撲鼻香」，太好的結論了，馬上拿題目來試試，如圖五，結果阿偉被嚇出一身冷汗，因爲他的答案竟然是「負」的，趕緊舉手發問，這究竟是怎麼回事？

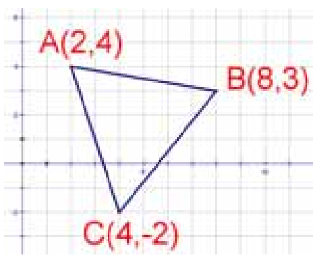
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}|6-16+16-32-12+4|$$

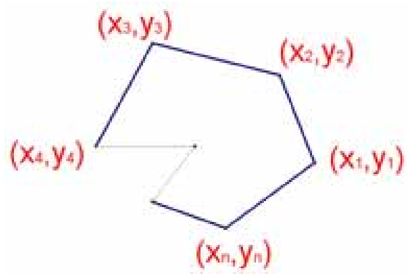
$$=\frac{1}{2}|-34|$$

$$=-17 \qquad **$$

問題出在 A、B、C 三點的排列順序上，在*式中，A、B、C 三點座標是依「逆時針」排列，而在**的計算過程中，阿偉卻將點座標以「順時針」排列，所以答案出現了負數，所以這個公式最好是將座標以逆時針排列，不然的話，切記要加上「絕對值」！



圖五



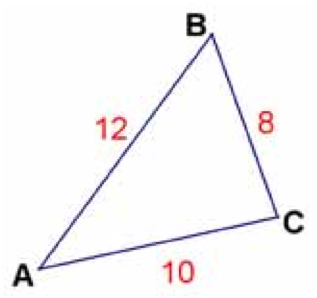
圖六

得到這麼好的結論，人心不足蛇吞象，可不可以推廣啊？當然可以，我們也可以將它用在求多邊形的面積喔，只要把多邊形想像成是很多個三角形組合而成的(如圖六)，此時公式仍然是成立的。

$$多邊形面積＝\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$ 其中↘乘爲正，↙乘爲負

注意：按逆時針排列不用加絕對值

當我們解決這個問題之後，阿哲心裏飄飄然，似乎像萬能的麥斯一樣，心中充滿所向無敵的神力，隨手畫了一個三角形，只知道三邊長是 8、10、12（如圖七），想而利用剛學會的方面算出它的面積，不過，他寫了寫之後停下筆來了，因爲，不管是「補成一個矩形」或是「利用座標的方式」兩個方法似乎都作不出來～



圖七

以前的數學家也和阿哲一樣，曾經被這個題目所困惑，不過有趣的是中外數學家中，各有一位人物在這個問題上留其名，那就是希臘時代的數學家海倫(Heron 或譯作海龍)與南宋的數學家秦九韶。

海倫的生卒年代已不好考究，在他的《測地術》一書中出現了這個公式，

海倫公式是否是海倫本人的創見，數學家也各有其看法，不過就像「畢氏定理」是否爲畢達哥拉斯本人發明的一樣，都無損於公式本身的炫麗，已知三角形的三邊長分別是 a、b、c，則三角形的面積：

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

這個公式被後人稱之爲海倫公式〔Heron's Formula〕。

秦九韶，字道古是宋 元黃金時期數學家中的四家之一，「性極機巧，星象、音律、算術以至於營造等事，無不精究」，西元 1247 年在兵荒馬亂的中編成了數學巨作--「數書九章」，書中共分爲九大類：大衍類、天時類、田域類、測望類、賦役類、錢穀類、營建類、軍旅類、市易類。每類 9 個題目，共 81 道題。

在《數書九章》卷五第二題，秦九韶提出了以下的問題：

問沙田一段，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里。

……欲知爲田幾何？

意思就是請讀者求出邊長分別爲 13 里、14 里和 15 里的三角形的面積，在書中秦九韶稱這道題目爲「三斜求積」，因此世人就稱這個求面積的方法爲「三斜求積術」。

已知三角形的三邊長由小到大分別是a、b、c，則三角形的面積：

$$\triangle = \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2 - (\frac{a^2+c^2-b^2}{2})^2}$$

那麼來個超級比一比，那個公式比較好用？結論是各有所長，海倫公式較簡潔，但是遇到邊長爲二次根式之無理數時，運算上比較複雜，而秦九韶的「三斜求積術」，卻很好處理邊長是無理數的情形。

事實上兩個公式是等價的，讓我們用哈利波特的魔杖一揮，讓海倫公式與「三斜求積術」來個相見歡，簡單說明如下：

【三斜求積術】

$$\begin{aligned}\triangle &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2 - (\frac{a^2+c^2-b^2}{2})^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}\end{aligned}$$

觀察上式，其實不用刻意區分邊長的大小，上式都可以算出△的面積。

【海倫公式】

$$\begin{aligned}\triangle &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{其中 } s=\frac{1}{2}(a+b+c) \\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}(\frac{(a+b+c)}{2}-a)(\frac{(a+b+c)}{2}-b)(\frac{(a+b+c)}{2}-c)} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}(\frac{(-a+b+c)}{2})(\frac{(a-b+c)}{2})(\frac{(a+b-c)}{2})} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{[(b+c)+a][(b+c)-a][a-(b-c)][a+(b-c)]} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}$$

您瞧，是不是一模一樣，所以真是英雄所見略同呢！

【參考資料】

數學廣角鏡：談祥伯著，凡異出版社，91 年 1 月：p30-p38
中西數學簡史：黃武雄編，人間文化事業公司，83 年 7 月：p25、27、29